ISSN 0135-3500. Зап. Ленингр. горного ин-та. 1990. Том 121.

УДК 550.42:519.21.001

К.В.КИСТЕРОВ

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОДЕРЖАНИЙ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ИЗМЕНЧИВОСТЬ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Выдвинута гипотеза о существовании связи между распределением содержаний химических элементов по вероятности и в пространстве.

На примере месторождений золото-кварцевой формации показана возможность математического анализа вероятностных распределений и предсказания на этой основе характера пространственной изменчивости (наличия самородков).

Обсуждаются перспективы применения аналогичных методов в других разделах геологии.

Пространственная изменчивость или неоднородность геологических объектов на разных уровнях их строения [I4] является основным (если не единственным) предметом изучения для геолога. С этой точки зрения дифференциация геологии как науки порождена огромным разнообразием видов пространственной изменчивости и методов ее изучения. Однако и поныне наиболее общей чертой этих методов является их эмпиризм, невозможность теоретического предсказания закономерностей пространственной изменчивости на еще не изученных уровнях организации вещества; здесь заключена, по-видимому, одна из главных методологических трудностей современной геологии. Поискам путей решения этой проблемы и посвящена настоящая работа.

Распределения содержаний химических элементов по вероятности давно привлекают внимание исследователей; для некоторых геологических объектов законы таких распределений интерпретируются как генетические характеристики, в обобщенном виде отражающие условия их образования [4]. Далее речь будет идти только о таких объектах; вопрос об объеме этого класса геологических объектов представляет самостоятельный интерес и здесь рассматриваться не будет.

Пространственная изменчивость геологических объектов до сих пор рассматривалась вне связи с вероятностными распределениями содержаний [2] и даже противопоставлялась им [II]. Такое разделение вероятностных (ВРС) и пространственных (ПРС) распределений содержаний, по мнению автора, методологически неверно. Автор предполагает, что условия образования геологических объектов, отраженные в законах ВРС, не могли не найти своего отражения и в законах пространственной изменчивости. Более подробное обоснование этой гипотезы и подтверждение ее для дискретных систем дано в работах [6, 9].

Доказательство наличия связи ВРС и ПРС и понимание ее форм позволило бы перейти к описанию и теоретическому предсказанию пространственной изменчивости на базе сравнительно легко изучаемых законов ВРС. Основным

содержанием настоящей работы является проверка сформулированной гипотезы.

Как можно представить себе причинный механизм связи ВРС и ПРС? Заметим, что ВРС и ПРС прежде всего суть способы организации масс (запасов) вещества и потому целесообразно подойти к вопросу о причине их связи с позиций системного анализа [12]. Рассмотрим систему A (геологический объект) с запасами M вещества X. Закон распределения запаса M по запасам m равнообъемных (одноранговых) элементов B системы A, который мы назовем структурой запасов, есть $dM = mp(m)dm$ (где $p(m)$ – функция (закон) ВРС X), причем с точки зрения теории вероятностей A есть генеральная совокупность B (нам удобнее изучать не ВРС, а именно структуру запасов, где массы M и m выражены в явном виде).

Специфика такой вероятностной [3] системы состоит в ее недискретности, в невозможности объективно выделить в составе генеральной совокупности A носитель случайной величины m. Таким носителем мы считаем B, но разбиение системы A на элементы B может быть произведено бесконечно большим числом способов. Произвольный выбор начальной точки разбиения и формы B приводит к „горизонтальной" недискретности системы на любом уровне, а выбор объема B – к „вертикальной" ее недискретности, т.е. возможности выделения бесконечно большого числа системных уровней.

Учтем, что закон ВРС интерпретируется как генетическая характеристика A. Это означает, что структура запасов должна оставаться постоянной при любом разбиении A на B, поскольку она всегда отражает один и тот же генезис. Нетрудно сообразить, что это условие может выполняться лишь в том случае, если содержания X определенным образом упорядочены в пространстве. Разумеется, закон ВРС не определяет такую упорядоченность однозначно, скорее он играет роль ограничения, позволяющего возникать лишь ПРС определенного, сравнительно узкого класса. Но в многокомпонентной системе с набором взаимно коррелированных законов ВРС X, Y, Z, ... класс возможных ПРС сузится уже не сильнее. Итак, мы пришли к выводу, что некоторые геологические объекты должны характеризоваться тесной (но не детерминированной) связью ВРС – ПРС.

Удобно прибегнуть к терминологии работы [10]: законы ВРС возникают в реализации динамической системы, при переходе ее в статическую, отражая условия этого перехода (становления геологического объекта). При этом статическая система приобретает побочное качество – пространственную изменчивость определенного типа, поскольку иными способами законы ВРС просто не могут быть реализованы [8].

Подтвердим наш вывод примером связи ВРС и ПРС в однокомпонентной системе и одновременно покажем возможности математического описания таких связей.

Ярким проявлением пространственной изменчивости геологических объектов является наличие в рудах золото-кварцевой формации [15] и в россыпях, образованных при их деструкции, самородков золота. Для Северо-Востока СССР, например, масса крупнейшего самородка россыпного месторождения колеблется от 8–10 кг (уникальные) до 100–200 г (рядовые, встречаются практически на любом, самом мелком месторождении).

Относительно закона ВРС золота для таких месторождений существуют две гипотезы: гиперболическая [I, 5, I6] и логнормальная [II, I3]. Проанализируем соответствие приведенных фактических данных о величине самородного золота этим гипотезам.

Гиперболическая гипотеза. Пусть V – объем A; v – объем B; $N = V/v$ – количество B в составе A; d – плотность самородного золота. Поскольку наличие самородков предполагает $vd \leq M$, мы будем рассматривать только эту область значений v. Анализ материалов разведки позволяет уточнить структуру запасов, соответствующую гиперболической гипотезе:

$$dM = T m^{-1} dm \qquad \text{при} \qquad a \leq m \leq c \leq vd, \tag{I}$$

где T – коэффициент (размерности M), характеризующий степень богатства A.

Из (I) следует плотность распределения N по m:

$$dN = T m^{-2} dm \qquad \text{при} \qquad a \leq m \leq c = vd \tag{2}$$

Чтобы учесть фигурирующий в (I) и (2) неявный параметр v, введем безразмерный параметр $x = c/T$, прямо пропорциональный v, и рассмотрим интегральные функции от аргумента m_K:

$$M_K = \int_{m_K}^{c} T m^{-1} dm = \frac{c}{x} \ln \frac{c}{m_K} \tag{3}$$

$$n_K = \int_{m_K}^{c} T m^{-2} dm = \frac{c}{x m_K} - \frac{1}{x}, \tag{4}$$

где M_K – общий запас всех B с запасами $m \geq m_K$.

Смысл n_K сложнее: эту величину нельзя рассматривать как число таких B, так как в этом случае система оказалась бы детерминированной. Разумно считать, что вероятности наличия в A равно i элементов B с $m \geq m_K$ подчинены распределению Пуассона $Po(n_K; i)$

Система A и уровень ее изучения задаются параметрами T и $x = f(v)$. Реализация такой системы на предложенной математической модели сводится к последовательному независимому выбору на оси m ряда точек m_K ($k = 1,2, \ldots, N-1$; $m_0 = c$, $m_N = a$, $m_K < m_{K-1}$). Из выражений (3) и (4) для каждого очередного B_K определяются запас $m(B_K)$, как $M_K - M_{K-1}$ и плотность условной (по условию n_{K-1}) вероятности возникновения именно такого $m(B_K)$ как $Po(n_K < n_{K-1}; 1)$. Заметим, что при $k = 1$ эта вероятность является безусловной, так как $n_0 = 0$; далее подобные оговорки будут подразумеваться. Во избежание недоразумений отметим также, что при такой схеме реализации допустимо $m(B_K) < m_K$.

Введем символы C_K и $\bar{C}_K$ для возникновения и невозникновения самородка при реализации B_K, т.е. для событий $m(B_K) = c$ и $m(B_K) < c$, условные (по условию n_{K-1}) вероятности этих событий $p(C_K) + p(\bar{C}_K) = 1$. Состоянием системы из N элементов назовем последовательность N симво-

лов C_K или $\bar{C}_K$ ($k = 1, 2, \ldots, N$). Нам нужно отыскать вероятность возникновения при реализации системы с заданными T и x хотя бы одного самородка, т.е. суммарную вероятность всех состояний системы, содержащих хотя бы один символ $\bar{C}_K$.

Рассмотрим реализацию B_K при заданных m_{K-1} и n_{K-1}. Из условия $m(B_K) \leqslant c$ следует наличие для m_K нижнего условного предела $\varphi_K = m_{K-1} e^{x}$; соответственно из (4) следует наличие для n_K верхнего условного предела $\Phi_K = n_{K-1} e^{x} + (e^{x} - 1)/x$. Таким образом, область определения n_K есть $[n_{K-1}; \Phi_K]$

Обозначим $dp(n_K)$ плотность условной вероятности n_K по условию n_{K-1}. По определению $dp(n_K) = (n_K - n_{K-1}) e^{-(n_K - n_{K-1})} dn_K$ (наличие предела Φ_K не меняет $dp(n_K)$ для $n_K < \Phi_K$). Тогда

$$\int_{n_{K-1}}^{\Phi_K} dp(n_K) = 1 - \left(x\Phi_1 n_{K-1} + \Phi_1 + 1\right) e^{-(x\Phi_1 n_{K-1} + \Phi_1)}$$

Однако интеграл вероятностей по всей области определения переменной тождественно равен 1; это означает, что «дефицит" вероятности сосредоточен в точке $n_K = \Phi_K$ и представляет собой $p(\bar{C}_K)$, а определение $dp(n_K)$ следует уточнить:

$$dp^{\delta}(n_K) = \left[(n_K - n_{K-1}) e^{-(n_K - n_{K-1})} + p(\bar{C}_K)\delta(n_K - \Phi_K)\right] dn_K,$$

где $\delta(n_K - \Phi_K)$ – дельта-функция Дирака, а символ $dp^{\delta}(n_K)$ введен для обозначения $dp(n_K)$, учитывающих дельта-слагаемые.

Согласно теореме Байеса, 2^N слагаемых, стоящих под знаком интеграла,

$$\int_{n_0}^{\Phi_1} \int_{n_1}^{\Phi_2} \cdots \int_{n_{N-1}}^{\Phi_N} \prod_{K=1}^{N} dp^{\delta}(n_K) \quad \text{при } k = 1, 2, \ldots, N \qquad (5)$$

после интегрирования дают вероятности всех 2^N возможных состояний системы из N элементов. В частности, вероятность $p(\bar{C}_1 \bar{C}_2 \ldots \bar{C}_N)$ отсутствия самородков получается при замене в (5) $dp^{\delta}(n_K)$ на $dp(n_K)$, а $P_x = 1 - p(\bar{C}_1 \bar{C}_2 \ldots \bar{C}_N) = f(x)$

Функция P_x была табулирована на x; отношение объемов уникальных и рядовых самородков оказалось равным 40–70, что хорошо согласуется с приведенными выше фактическими данными.

Логнормальная гипотеза. Данная гипотеза анализировалась по сходной методике. Формулировка гипотезы и способы расчета параметров были заимствованы из работы [II]. Оказалось, что логнормальный закон ВРС запрещает существование сколько-нибудь крупных самородков; например, для рудного тела с запасами 100 кг и среднем содержанием 25 г/т вероятность возникновения хотя бы одного самородка массой 16 г составляет примерно 10^{-950}.

Таким образом, наблюдаемая в природе пространственная изменчивость (наличие самородков золота) может быть выведена из гиперболического закона ВРС, но принципиально противоречит логнормальному закону.

Приведенный пример подтверждает гипотезу о существовании связи ВРС и ПРС и показывает возможность описания этой связи с помощью аппарата обобщенных функций. Дальнейшие исследования в этой области, в первую очередь разработка аналогичного математического аппарата для описания многокомпонентных систем, позволят с новых позиций подойти к решению многих задач. Например, минеральный состав гранитов можно рассматривать как условие реализации заданного набора ВРС при малых v, а наличие в гранитах шлиров, обогащенных темноцветными минералами, – как такое же условие для более высоких системных уровней. Тогда можно описать эти явления сколь угодно детально, зная ВРС содержаний отдельных химических элементов и их корреляцию и используя чисто теоретический подход. Интересны перспективы таких методов в прикладной геологии: так, если в качестве B рассматривать минимальный объем эксплуатационного блока (селективность выбранного способа отработки), появляется возможность теоретического расчета промышленных кондиций и рентабельности вовлечения месторождения в эксплуатацию [7]. Заслуживает внимания и возможность проверки гипотез о законах ВРС путем сравнения их следствий с закономерностями ПРС.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Богацкий В.В. *Математический анализ разведочной сети.* М.: Госгеолтехиздат, 1963. 212 с.

2. Боровко Н.Н. Статистический анализ пространственных геологических закономерностей. Л.: Недра, 1971. 173 с.

3. Дружинин В.В., Конторов Д.С. Проблемы системологии. М.: Советское радио, 1976. 296 с.

4. Канцель А.В. Функция распределения металла в рудах как генетическая характеристика процесса рудообразования // Изв. АН СССР. Сер. геол. 1966. № 10. С. 18-29.

5. Кистеров К.В. О структуре запасов россыпей золота // Мат-лы по геол. и полезн. ископ. Северо-Востока СССР. 1982. Вып. 26. С. 198-202.

6. Кистеров К.В. *Пространственная изменчивость геологических объектов и возможности ее описания* / Ленингр. горный ин-т. Л., 1984. 18 с. Деп. в ВИНИТИ, № 2331-84 деп.

7. Кистеров К.В. О применимости математико-статистических методов к решению задач геолого-промышленной оценки месторожд. полезн. ископ. / Ленингр. горный ин-т. Л., 1984. 17 с. Деп. в ВИЭМС, № 131мг-Д84.

8. Кистеров К.В. *О механизме связи распределений содержаний по вероятности и в пространстве* / Ленингр. горный ин-т. Л., 1986. 10 с. Деп. в ВИНИТИ, № 1822-1986.

9. Кистеров К.В. Методологические основания системного подхода к изучению пространственной изменчивости геологических объектов // Тез. докл. II Всесоюзн. конференции „Системный подход в геологии" (теоретические и прикладные аспекты). М., 1986. С. 54.

10. Косыгин Ю.А., Соловьев В.А. Геологические формации и тектоника // Геология и геофизика. 1968. № 3. С. 17-24.

11. Матерон Ж. Основы прикладной геостатистики. М.: Мир, 1968. 408 с.

12. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. М.: Мир, 1978. 311 с.

13. Разумовский Н.К. Механический состав россыпного золота и новые данные по методике подсчета запасов россыпей ДАН СССР. 1940. Т. 28. С. 815-817. № 9.

14. Рац М.В. Неоднородность горных пород и их физических свойств. М.: Наука, 1968. 108 с.

15. Рожков И.С. Генетические типы месторождений золота и их положение в геотектонических структурах // Геолог. и геофиз. 1968. № 7. С. 3-16.

16. Трушков Ю.Н. Распределение металла в россыпях Северо-Востока и классификация их по выдержанности // Тр. ВНИИ-1. 1959. Вып. 46-47. С. 1-16.

126555