Записки Ленинградского горного института им.Г.В.Плеханова.
Т. 125. Л., 1991

УДК 539.375

К ТЕОРИИ РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИ СЖАТИИ

Н.А.ЛАВРОВ, Л.И.СЛЕПЯН

Как свидетельствуют эксперименты [6,8,I2,I4], при сжатии упругого тела оно может хрупко разрушаться путем распространения трещин по направлению сжатия. В то же время трещина, ориентированная по направлению одноосного сжатия, не взаимодействует с однородным полем напряжений. Действительно, мысленно разрежем образец, в котором реализовано однородное поле напряжений, на две части по некоторой цилиндрической поверхности с образующей, ориентированной по направлению сжатия. При этом напряженное состояние каждой из половин останется прежним и сумма энергий будет равна энергии целого образца. Таким образом, при прямолинейном распространении трещины энергия, необходимая для образования новых поверхностей, не выделяется. Не возникает и концентрации напряжений у края трещины. Однако в экспериментах было установлено, что форма трещины у ее края соответствует некоторому ненулевому коэффициенту интенсивности напряжений (КИН) K_I [I2].

Предлагались различные способы разрешения этого парадокса, основанные на учете возможных неоднородностей в структуре материала или (и) в поле напряжений. В работе [6] разрушение образца объяснено попаданием смазки (графитового порошка, помещаемого между образцом и сжимающими его плитами) в микротрещины в образце и ее распирающим действием. В статьях [8,I2] обсуждается влияние конечности размеров образца, трения в местах приложения к нему нагрузки, конечности расстояния между берегами искусственно созданного разреза, сил молекулярного сцепления между берегами этого разреза, а также физической нелинейности. Указано на возможность появления концентрации напряжений вследствие потери устойчивости формы трещины (или образца).

Рассматривалось также влияние дефектов – пор или наклоненных к оси сжатия микротрещин [I,2,4,5,7], возможно, наполненных газом или жидкостью. Отмечена возможность прорастания отдельных начальных трещин (наклонных) и их смыкания [7].

В работе [3] предложен критерий разрушения при сжатии (вдоль трещин), в основе которого лежит представление локальной поверхностной потере устойчивости.

В [8,13] указано на такую модель разрушения, которая реализуется при сжатии упаковки блоков (зерен). При этом сжатие порождает боковые распирающие усилия, приводящие к разрушению поперечных связей.

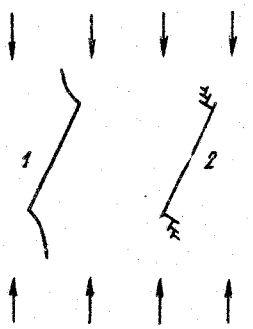


Рис.1. Рост трещины с начальным наклоном к направлению нагрузки

Причиной продольного распространения трещины может также стать шероховатость берегов начальной трещины [4]. В случае наклонной начальной трещины ее дальнейший рост [8] может происходить так, как показано на кривых I и 2 (рис.I).

В указанных выше моделях рост трещины объясняется влиянием изначально существующих неправильностей. Вместе с тем рост продольной трещины при достаточном удалении ее края от начального дефекта уже не может быть объяснен влиянием последнего, он происходит "автономно" [12]. Таким образом, апелляция к начальным дефектам недостаточна. Ниже показано, что макроскопически прямолинейное распространение трещины вдоль линии сжатия возможно и при отсутствии влияния каких-либо начальных дефектов. Для этого макроскопически прямолинейная трещина на "микроуровне" должна распространяться по криволинейной траектории, осциллирующей около прямой.

Для обоснования энергетической непротиворечивости такого процесса рассмотрим упругую плоскость в условиях одноосного сжатия: $\sigma_{11}=-\sigma_0<0$. Проведем в плоскости кривую S, заданную уравнением

$$x_2=h(x_1),\ -\infty<x_1<\infty,\ h(x_1+T)=h(x_1),\ 0<T.$$

При этом полуплоскость $x_2\le h(x_1)$ действует на полуплоскость $D\{h(x_1)\le x_2\}$ некоторым напряжением $\underline{\sigma}(M), M\in S$. Если мысленно разрезать плоскость по кривой S и (квазистатически) отделить одну часть плоскости от другой, то вследствие снятия напряжений $\underline{\sigma}$ точки полуплоскости D, лежащие на границе S, получат некоторое перемещение $\underline{v}=\{v_1,v_2\}$. При снятии нагрузки выделится энергия; в расчете на один период $s\{0<x_1<T\}$ контура S энергия

$$W_T=\frac{1}{2}\int_S(-\underline{\sigma})\cdot\underline{v}\,dS=\frac{\sigma_0}{2}\int_0^T v_1(x_1)\frac{dh}{dx_1}\,dx_1\ge 0. \qquad (1)$$

Если $W_T\ge 2\gamma L$ (здесь γ – эффективная поверхностная энергия; L – длина контура s), то криволинейное распространение трещины оказывается энергетически оправданным (в среднем по периоду) и может происходить и при отсутствии дефектов в материале.

Если касательная к контуру S составляет малый угол α с осью x_1 (и, следовательно, амплитуда A осцилляций контура S мала по сравнению с периодом T), выделяющаяся энергия рассчитывается с использованием асимптотического решения [9] задачи о напряженном состоянии одноосно сжа-

той полуплоскости с криволинейной границей. Тензор напряжений $\underline{\underline{\tau}}$ в задаче об одноосно сжатой полуплоскости $D\{h(x_1)\leqslant x_2\}$ со свободной границей разыскивается в виде суммы

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}^0 + \underline{\underline{\tau}}^1,$$

где тензор $\underline{\underline{\tau}}^0$ отвечает одноосному сжатию, а тензор $\underline{\underline{\tau}}^1$ описывает поле напряжений в полуплоскости D, на границе которой действует нагрузка $-\underline{\sigma}$, причем $\underline{\underline{\tau}}^1 \to 0$ при $x_2 \to \infty$. Проекции σ_t и σ_n упомянутого вектора $\underline{\sigma}$ на касательную $\underline{t}$ и нормаль $\underline{n}$ к границе S полуплоскости D рассчитываются по формулам

$$\sigma_t = -\sigma_0 \sin\alpha \cos\alpha; \quad \sigma_n = -\sigma_0 \sin^2\alpha;$$

$$\sin\alpha = h'(1+h'^2)^{-1/2}; \quad \cos\alpha = (1+h'^2)^{-1/2}; \quad h' = \frac{dh}{dx_1}.$$

Асимптотически точно ($\alpha \to 0$) напряженное состояние полуплоскости D, нагруженной по границе S напряжением $-\underline{\sigma}$, можно рассчитать как результат действия на границу $x_2 = 0$ полуплоскости $0 \leqslant x_2$ касательной нагрузки $\tau_{12} = \sigma_0 h'$ [9]. С учетом периодичности формы границы S для компонент тензора τ^1 будем иметь

$$\tau^1_{11} + \tau^1_{22} = -\frac{\sigma_0}{\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^T \frac{dh}{d\xi} \ln\left[ch\frac{2\pi x_2}{T} - \cos\frac{2\pi(x_1-\xi)}{T}\right] d\xi;$$

$$\tau^1_{22} = \frac{\sigma_0}{T} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^T \frac{dh}{d\xi} \frac{x_2 sh\frac{2\pi x_2}{T}}{ch\frac{2\pi x_2}{T} - \cos\frac{2\pi(x_1-\xi)}{T}} d\xi.$$

Вычислив отвечающие им компоненты деформации, при помощи интегрирования найдем перемещение $\underline{v}$. С использованием уравнения (I) для выделяющейся энергии окончательно получим

$$W_T \sim \varkappa \frac{\sigma_0^2}{E} A^2 \quad (A/T \to 0), \qquad (2)$$

где E – модуль Юнга; $\varkappa$ – коэффициент, зависящий от формы границы S (рис.2). Из представленных данных видно, что наибольшее выделение энергии деформации отвечает трапециевидной траектории 5.

Оценим необходимую амплитуду A шероховатости, используя данные K_I-тарировки сжатой пластины из полиметилметакрилата с круглым отверстием и двумя симметрично расположенными трещинами [I2] (рис.3). Экспериментальная и расчетная [I0] зависимости безразмерного КИН $\psi = K_I/(\sigma_0\sqrt{l})$ от отношения длины трещины ℓ к радиусу отверстия R, отвечающие "услов-

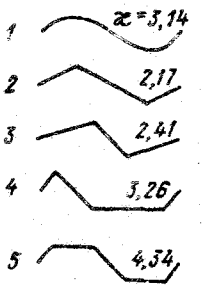


Рис.2. Синусоидальный (1) и кусочно-линейные контуры s (2-5) при различных траекториях трещины $æ$ – коэффициент формы

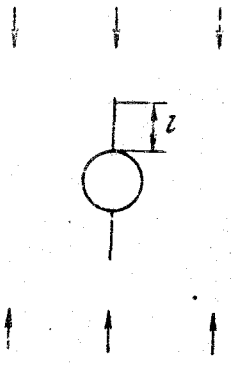


Рис.3. Схема K_I –тарировки сжатой пластины с круглым отверстием

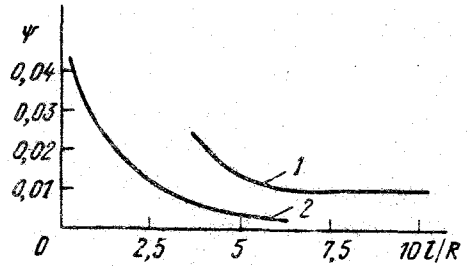


Рис.4. Экспериментальная (1) и расчетная (2) зависимости безразмерного КИН $\psi = K_I / (\sigma_0 \sqrt{H})$ от отношения длины трещины ℓ к радиусу отверстия R

но-однородному" полю напряжений квадратной пластины со стороной $2H = 0{,}16$ м и $R = 0{,}005$ м, представлены на рис.4. Отмечено, что для коротких трещин теоретическая и экспериментальная кривые близки по характеру, а при $5 \leqslant \ell/R \leqslant 10$ ординаты кривых отличаются на приблизительно постоянную величину, лежащую в пределах от 0,009 до 0,012. Этот уровень и примем за критическое значение (безразмерного) КИН для изолированной трещины. Приравняв поток энергии в край растущей трещины $K_I^2/(2E)$ плотности выделяющейся энергии W_T/T (полагаем $L \sim T$), получим

$$\frac{A^2}{T} = \frac{1}{2æ}\left(\frac{K_I}{\sigma_0\sqrt{H}}\right)^2 H \approx$$

$$\approx \frac{1}{æ}\, 0{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{м}.$$

Таким образом, отношение A^2/T имеет порядок 10^{-5} м. Если принять, что по порядку величины $A \approx T$, то очевидно, что амплитуда шероховатости порядка 10^{-3} мм уже достаточна для распространения трещины сжатия в данном материале.

Чтобы построить теорию распространения макроскопически прямолинейной трещины сжатия, будем считать ее на микроуровне зубчатой ломаной линией, отрезки которой ориентированы под углом $\pm\pi/4$ к оси x_1. Упругая плоскость находится в условиях двухосного сжатия на бесконечности $\sigma_{11}^{o} < \sigma_{22}^{o} < 0$ (компонентам напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} до разрушения приписываем верхний индекс "о"). В результате сжатия вдоль оси x_1 происходит частичное выдавливание зубцов. Среднее взаимное смещение оснований зубцов вдоль оси x_2 обозначим $2u$. Тогда полоска материала, имеющая до разрушения ширину $2A$, после разрушения будет иметь ширину $2(A+u)$. Предположим, что берега взаимодействуют без трения. В этом случае нормальные напряжения в зоне

разрушения выравниваются: $\sigma_{11} = \sigma_{22}$. Из условия неразрывности вытекает равенство

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \varepsilon^{\circ}_{11} + \varepsilon^{\circ}_{22} + u/A .$$

Отсюда, переходя к задаче с нулевыми напряжениями при $|x_2| \to \infty$, получим, что на оси x_1, на берегах макротрещины $\Gamma\{|x_1| < \ell\}$, возникают напряжения

$$\sigma^{*}_{22} = \sigma_{22} - \sigma^{\circ}_{22} = \frac{\sigma^{\circ}_{11} - \sigma^{\circ}_{22}}{2} + \frac{u}{A} K; \qquad (3)$$

где $K = E/2(1-\nu)$; ν – коэффициент Пуассона.

Эта формула справедлива, пока $\sigma^{*}_{22} \leqslant -\sigma^{\circ}_{22}$ $(x_1 \in \Omega)$. В противном случае сплошность нарушается (трещина раскрывается) и следует положить $\sigma^{*}_{22} = -\sigma^{\circ}_{22}$.

Воспользовавшись связью между раскрытием трещины $2u$ и нормальным давлением σ^{*}_{22} на ее берегах [II], получим интегральное уравнение относительно перемещения

$$u(x_1) + \frac{1}{A(1-\nu)} \int_{\Omega} u(\xi) G(x_1, \xi)\, d\xi + \frac{\sigma^{\circ}_{11} + \sigma^{\circ}_{22}}{E} \int_{\Omega} G(x_1, \xi)\, d\xi - \frac{2\sigma^{\circ}_{22}}{E} \sqrt{\ell^2 - x_1^2} = 0; \qquad (4)$$

$$G(x_1, \xi) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\sqrt{\ell+\xi}\sqrt{\ell-x_1} + \sqrt{\ell-\xi}\sqrt{\ell+x_1}}{\sqrt{\ell+\xi}\sqrt{\ell-x_1} - \sqrt{\ell-\xi}\sqrt{\ell+x_1}} \right| .$$

Для определения координаты ℓ_* границы зоны $\Omega\{\ell_* < |x_1| < \ell\}$ взаимодействия берегов служит дополнительное условие

$$u(\pm \ell_*) + \frac{1-\nu}{E} A(\sigma^{\circ}_{11} + \sigma^{\circ}_{22}) = 0.$$

Заметим, что при достаточно большой разности $\sigma^{\circ}_{22} - \sigma^{\circ}_{11}$ контакт берегов нигде не нарушен: $\Omega = \Gamma$ $(\ell_* = 0)$.

Если берега взаимодействуют лишь на малом участке вблизи края трещины $(\ell - \ell_* \ll \ell)$, то, пренебрегая взаимным влиянием концевых зон, уравнение (4) можно упростить следующим образом:

$$u(x_1) + \frac{1}{A(1-\nu)} \int_{\ell_*}^{\ell} u(\xi) G_1(x_1, \xi)\, d\xi + \frac{\sigma^{\circ}_{11} + \sigma^{\circ}_{22}}{E} \left[(x_1 - \ell_*) G_1(x_1, \ell_*) + \frac{2}{\pi} \sqrt{(\ell - x_1)(\ell - \ell_*)} \right] - 2\sqrt{2\ell}\, \frac{\sigma^{\circ}_{22}}{E} \sqrt{\ell - x_1} = 0, \quad \ell_* < x_1 < \ell; \qquad (5)$$

$$G_1(x_1,\xi)=\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{\sqrt{\ell-x_1}+\sqrt{\ell-\xi}}{\sqrt{\ell-x_1}-\sqrt{\ell-\xi}}\right| \quad . \quad . \quad (6)$$

Использование критериев линейной механики разрушения оправдано, если существует некоторая, достаточно большая окрестность ω края трещины, где с достаточной точностью выполняются зависимости линейной теории (асимптотики типа квадратного корня). Обозначим минимальную длину этой окрестности ε. Пусть длина области взаимодействия берегов трещины у ее края $\ell-\ell_* >> \varepsilon$. Тогда, учитывая интегрируемость функций $u(\xi)G_1(x_1,\xi)$ и $u(\xi)G_1^0(x_1,\xi)$, где

$$G_1^0(x_1,\xi)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\ell-x_1}{\ell-\xi}}\ ;$$

$$G_1(x_1,\xi)\sim G_1^0(x_1,\xi) \quad (x_1\in\omega,\ \ell-x_1\ll\ell-\xi),$$

для $x_1\in\omega$ можем заменить в формуле (6) G_1 на G_1^0. Получим

$$u(x_1)\sim M_I\sqrt{\ell-x_1} \quad (x_1\to\ell);$$

$$M_I=2\sqrt{2\ell}\ \frac{\sigma_{11}^0}{E}-\frac{4}{\pi}\sqrt{\ell-\ell_*}\ \frac{\sigma_{11}^0+\sigma_{22}^0}{E}-\frac{2}{\pi}\ \frac{1}{A(1-\nu)}\int_{\ell_*}^{\ell}\frac{u(\xi)}{\sqrt{\ell-\xi}}\,d\xi. \quad (7)$$

Интегральное уравнение (5) определяет перемещение берегов трещины с характерной корневой асимптотикой; для КИН имеем $K_I\sqrt{2\pi}=EM_I/4$. В выражении (7) перемещение $u(\xi)$ также определяется уравнением (5). Таким образом, формула (7) с учетом силового критерия разрушения исчерпывает формулировку рассматриваемой задачи.

Итак, роль шероховатости берегов оказалась решающей для трещины сжатия. Шероховатость, однако, может существенно влиять на процесс разрушения и в других ситуациях, в частности при распространении трещин в условиях растяжения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Германович Л.Н., Дыскин А.В. Модель разрушения хрупкого материала с трещинами при одноосном нагружении // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1988. № 2.

2. Гольдштейн Р.В., Ладыгин В.М., Осипенко Н.М. Модель хрупкого разрушения слабо пористого материала при сжатии и растяжении // ФТПРПИ. 1974. № 1.

3. Гузь А.Н. Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Плоская задача. // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259. № 6.

4. Дыскин А.В. Модель разрушения хрупкой породы с системой ориентированных трещин при сжатии // ФТПРПИ. 1985. № 2.

5. Механика разрушения горных пород / В.И.Кондауров, Ш.А.Мухамедиев, Л.В.Никитин, Е.И.Рыжак // Ин-т физики Земли АН СССР. М.: Изд-во АН СССР, 1987.

6. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Иностр. литература, 1954. Т.1.

7. Никитин Л.В., Одинцев В.Л. Механика отрывного разрушения сжатых газоносных горных пород // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6.

8. Оберт Л. Хрупкое разрушение горных пород // Разрушение. М.: Мир. 1976. Т. 7. Ч. 1.

9. Пальмов В.А. Концентрация напряжений около шероховатой границы упругого тела // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 3.

10. Писаренко Г.С., Науменко В.П. Управление разрушением в испытаниях на трещиностойкость // Проблемы прочности и пластичности твердых тел. Л.: Наука. 1979.

11. Слепян Л.И., Механика трещин. Л.: Судостроение. 1990.

12. Экспериментальное определение величины K_I при сжатии пластины вдоль линии трещины / Г.С.Писаренко, В.П.Науменко, О.В.Митченко, Г.С.Волков // Проблемы прочности. 1984. № 11.

13. Dey T. N., Wang Chi-Yuen — Intern. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr. 1981. V. 18. № 3. P. 199—209.

14. Muller M., Pache. F. — Rock Mechanics and Engineering Geol. Suppl. 1965. 2. P. 7—24.