Записки Ленинградского горного института им.Г.В.Плеханова.
Т. 125. Л., 1991

УДК 622.023.23:539.376

# РАЗРУШЕНИЕ И ДЕФОРМАЦИЯ ГОРНЫХ ПОРОД КАК ПРОЦЕСС СТАТИСТИЧЕСКОГО ОТБОРА СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Б.Г.ТАРАСОВ

Одним из важных свойств неоднородных материалов, в том числе и горных пород, является существенное повышение прочности и предела упругости с ростом бокового давления $\sigma_2$. Увеличение прочности с ростом $\sigma_2$ происходит до некоторого предела (криволинейный участок огибающей кругов Мора), при котором боковое давление растет до $\sigma_{2кр}$. При более высоких боковых давлениях рост прочностных и упругих характеристик прекращается.

Механизм этого явления в полной мере пока не раскрыт. Попытки его объяснения с позиций сплошной однородной среды не затрагивают физической природы происходящих в материале процессов и носят чисто формальный характер.

Наибольший вклад в решение этого вопроса сделан А.Н.Ставрогиным, предложившим статистическую модель деформации неоднородных твердых тел, которая объясняет в совокупности целый ряд специфических свойств, характерных для этих материалов [2,4,5]. Однако вопрос, связанный с механизмом упрочнения неоднородных тел, вызванного действием бокового давления, и условиями перехода к независимому от $\sigma_2$ состоянию прочностных и упругих характеристик, остался недостаточно разработанным ввиду несовершенства некоторых положений статистической модели. Новые экспериментальные факты, не учтенные ранее, и анализ прежних результатов с новых позиций позволили существенно дополнить модель и дать объяснения упомянутым выше явлениям.

Основная идея статистической модели А.Н.Ставрогина состоит в том, что в неоднородных твердых телах содержатся дефекты различной степени опасности, распределенные в объеме тела в соответствии с законами вероятности. При нагружении тела появляются сдвиги по микроплощадкам, совпадающим с дефектами. Наиболее вероятно расположение площадок сдвига под углом $\delta = 45^0$ к оси действия $\sigma_1$, т.е. в плоскости максимальных касательных напряжений. Размер таких микроплощадок $A$ в первом приближении равен величине зерна $a$. Как только касательные напряжения на микроплощадках $A$ достигают критического значения, происходит сдвиг, приводящий к возникновению отрыва по вертикальным площадкам $B$. Микроплощадки сдвига и отрыва образуют ступеньку. Многократное повторение этих ступенек напоминает лестницу, которую макроскопически можно представить шероховатой плоскостью сдвига $\omega$,

наклоненной к оси $\sigma_1$ под углом $\alpha \neq 45^0$. Появление первой плоскости означает достижение предела упругости. Возникновение других плоскостей $\omega$ за пределом упругости вплоть до предела прочности вызывается процессом деформационного упрочнения по предыдущим плоскостям.

Уравнение предельного равновесия на одной ступеньке сдвиг-отрыв можно записать в виде

$$\tau a^2 = \tau_1 a^2 + \sigma_p a b \cos\delta + \sigma_2 a b \cos\delta, \qquad (1)$$

где $\tau = 0{,}5(\sigma_1 - \sigma_2)$; $\tau_1$ – предельное сопротивление сдвигу по микроплощадке $A$; $\sigma_p$ – прочность на отрыв по микроплощадке $B$; $b$ – размер микроплощадки $B$; $\delta$ – угол наклона микроплощадки $A$ к оси действия $\sigma_1$.

С увеличением $\sigma_2$ большее количество элементов сдвига типа $A$ включается в процесс пластической деформации, растет общая предельная пластичность тела, уменьшается высота ступенек типа $B$, размер микроплощадок $A$ остается неизменным, а угол $\alpha$ растет, стремясь к $45^0$.

## МЕХАНИЗМ УПРОЧНЕНИЯ ОТ ДЕЙСТВИЯ БОКОВОГО ДАВЛЕНИЯ

Механизм увеличения прочности и предела упругости с ростом $\sigma_2$ в модели А.Н.Ставрогина трактуется следующим образом.

Увеличение $\sigma_2$ приводит к росту сопротивления отрыву по площадкам $B$ [см. уравнение (I)]. Сопоставление расчетов с экспериментом показывает, что реальное упрочнение $\Delta\tau_y$ или $\Delta\tau_п$ (здесь $\Delta\tau_y$ и $\Delta\tau_п$ – разность между величинами предела соответственно упругости и прочности при $\sigma_2 \cdot K_2 > 0$ и $\sigma_2 = 0$), которое испытывают горные породы и другие неоднородные материалы, существенно больше упрочнения $\Delta\tau_y(\sigma_2)$ или $\Delta\tau_п(\sigma_2)$, вызванного действием $\sigma_2$ на площадки $B$ (рис.I). Доля последнего для различных материалов составляет примерно от 10 до 50 %. Значения $\Delta\tau_y(\sigma_2)$ рассчитаны на основании экспериментальных данных об изменении угла $\alpha$, определяющего расположение плоскостей скольжения $\omega$ под действием бокового давления $\sigma_2$ [1,3,4,6].

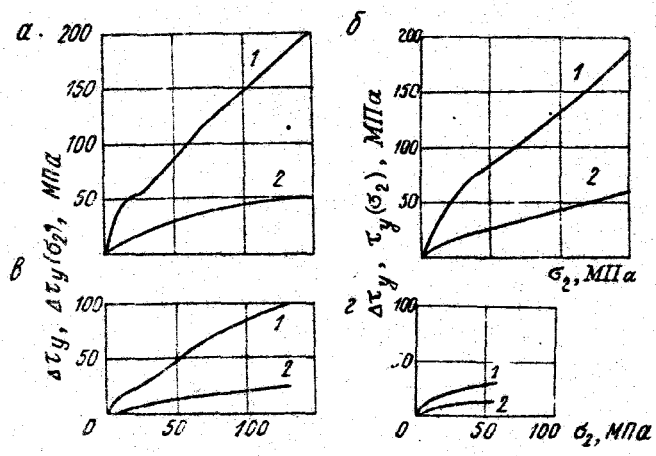



Рис.1. Зависимость $\Delta\tau_y$ и $\Delta\tau_y(\sigma_2)$ от уровня бокового давления $\sigma_2$: а и б – для песчаника I (взрывоопасного) и II (незрывоопасного), в и г – для мрамора I и II 1 и 2 – $\Delta\tau_y$ и $\Delta\tau_y(\sigma_2)$ соответственно

В рассматриваемой модели создание "недостающего" упрочнения $\Delta\tau_y - \Delta\tau_y(\sigma_2)$ объяснено вклю-

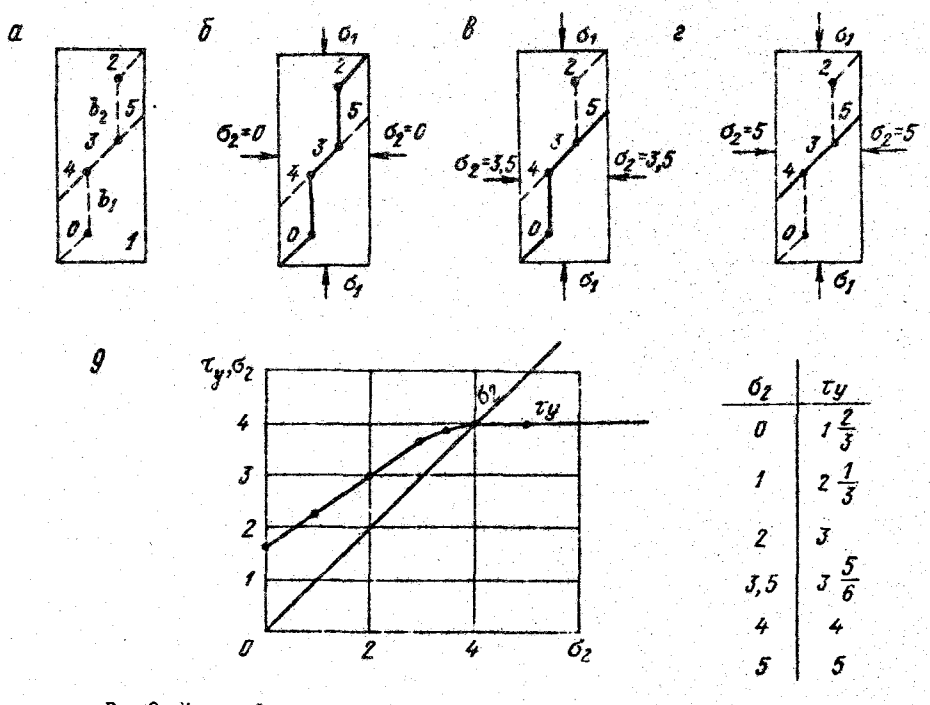
чением в плоскости сдвига $\omega$ более прочных элементов $A$. Для анализа этого механизма рассмотрим фрагмент модели неоднородного твердого тела (рис.2). В сечении тела выделены микроплощадки сдвига $A$ и отрыва $B$, участвующие в формировании одной из плоскостей $\omega$. Для простоты рассуждения примем следующие допущения:

1) при деформации по элементам $A$ сопротивление их не меняется;

2) прочность на отрыв по площадкам $B$ равна нулю;

3) $b = a/\cos\delta$.

Будем нагружать это тело при разных уровнях бокового давления $\sigma_2$, проследим за формированием плоскости $\omega$ и определим значения пределов упругости тела, пользуясь уравнением (I). В условиях одноосного сжатия ($\sigma_2 = 0$) деформация тела осуществляется по элементам $0-b_1-3-b_2-2$ (рис.2,а), так как это наиболее выгодное направление с энергетической точки зрения – для осуществления деформации по нему требуется наименьшее усилие. Увеличение бокового давления вызывает сопротивление по вертикальным площадкам $b_1$ и $b_2$, что приводит к упрочнению материала. До $\sigma_2 = 3$ на упрочнение тела влияют обе вертикальные площадки (рис.2,б). При $\sigma_2 > 3$ процесс деформации по микропаре сдвиг–отрыв $b_2 - 2$ становится невыгодным и плоскость $\omega$ развивается по элементам $0-b_1-3-5$ (рис.2,в). При $\sigma_2 = 3 \div 4$ тело упрочняется от действия бокового давления только на нижнюю




| $\sigma_2$ | $\tau_y$ |
|---|---|
| 0 | $1\frac{2}{3}$ |
| 1 | $2\frac{1}{3}$ |
| 2 | 3 |
| 3,5 | $3\frac{5}{6}$ |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |

Рис.2. Модель формирования первой плоскости сдвига $\omega$ при разных боковых давлениях в условных единицах (а–г) и график $\tau_y - \sigma_2$ (д)

площадку отрыва $b_1$. И, наконец, при $\sigma_2 > 4$ формируется плоскость $\omega$ 4-3-5, состоящая только из площадок сдвига $A$ (рис.2,г). График зависимости предела упругости от бокового давления (рис.2,д) показывает, что при исключении площадок отрыва $b$ предел упругости перестает зависеть от $\sigma_2$.

Здесь мы наблюдаем, что с ростом $\sigma_2$ в процесс формирования плоскости $\omega$ вовлекаются более прочные элементы $A$, которые до этого в процессе участия не принимали, однако включение их дополнительного упрочняющего воздействия на материал не оказывает. Дополнительное упрочнение $\Delta\tau_y - \Delta\tau_y(\sigma_2)$ у реальных материалов вызвано тем, что каждый из элементов $A$, включившихся в процесс пластической деформации, испытывает деформационное упрочнение. При увеличении бокового давления создаются условия для развития бо́льших по величине деформаций на каждом из этих элементов до момента образования первой плоскости $\omega$, а следовательно, при этом растет и сопротивляемость нагрузкам на пределе упругости. Включившиеся в плоскость $\omega$ более прочные элементы $A$, обладающие большей способностью к деформационному упрочнению, еще усиливают этот эффект.

Примерно пропорциональная зависимость $\Delta\tau_y - \Delta\tau_y(\sigma_2)$ от $\Delta\varepsilon_1^y = \varepsilon_{1,K_i}^y - \varepsilon_{1,0}^y$ (здесь $\varepsilon_{1,K_i}^y$ и $\varepsilon_{1,0}^y$ – пределы упругой деформации при боковом давлении $\sigma_2 = K_i$ и $\sigma_2 = 0$) подтверждает вышесказанное (рис.3, 4).

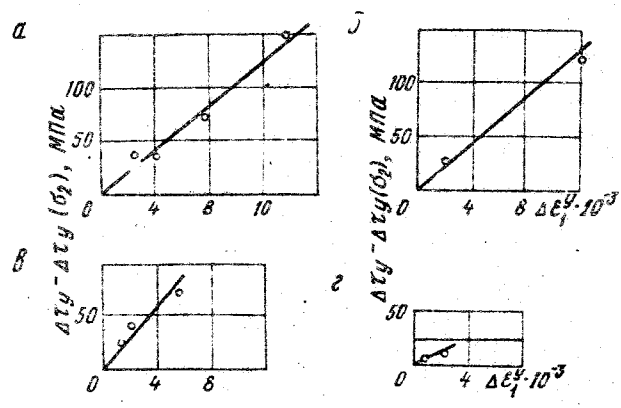



Рис.3. Зависимость $\Delta\tau_y$ и $\Delta\tau_y(\sigma_2)$ от $\Delta\varepsilon_1$ для песчаника I (а) и II (б), мрамора I (в) и II (г)

Для создания упрочняющего эффекта помимо величины деформации важное значение имеет также способность микроэлементов сдвига $A$ к деформационному упрочнению. Эту способность можно характеризовать коэффициентом деформационного упрочнения $K^{\text{д}} = (\Delta\tau_y - \Delta\tau_y(\sigma_2))/\Delta\varepsilon_1^y$. Наименьшее значение $K^{\text{д}}$ из рассмотренных пород имеет мрамор II. Коэффициент $K^{\text{д}}$, рассчитанный для предельных значений прочности ($K_{\text{п}}^{\text{д}}$), ниже, нежели для пределов упругости ($K_{\text{у}}^{\text{д}}$). И это закономерно, поскольку каждый из микроэлементов, испытывающих деформационное упрочнение, на участке, расположенном ближе к его собственному пределу упругости, имеет модуль упрочнения более высокий, нежели на участке, приближенном к пределу прочности. После достижения предела прочности дальнейшая деформация элементов осуществляется при неизменном уровне нагрузки, о чем свидетельствуют результаты исследования больших деформаций горных пород [6].

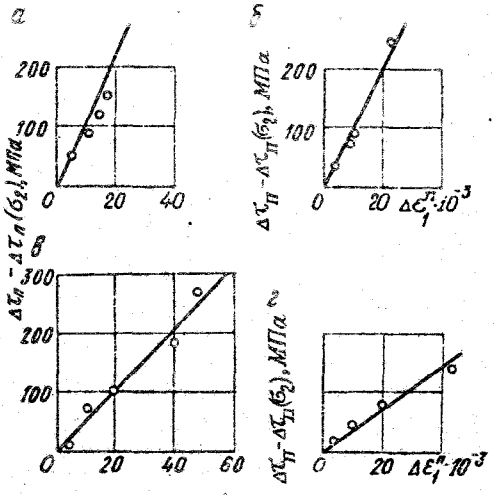



Рис.4. Зависимость $\Delta\tau_{\Pi}$ и $\Delta\tau_{\Pi}(\sigma_2)$ от $\varepsilon_1$ для песчаника I (а) и II (б), мрамора I (в) и II (г) для предельных значений прочности

Таким образом, увеличение пределов прочности и упругости неоднородных твердых тел при увеличении бокового давления $\sigma_2$ происходит за счет двух факторов:

1) упрочняющего воздействия $\sigma_2$ на площадки отрыва $B$;

2) деформационного упрочнения по площадкам сдвига $A$, величина которого зависит от величины деформации по площадкам и способности материала к деформационному упрочнению.

Принципиальным условием для возможности реализации эффекта упрочнения с ростом $\sigma_2$ является наличие в материале микроплощадок отрыва $B$.

Уравнения, описывающие паспорта прочности и упругости горных пород, можно представить в виде

$$\tau_{У} = \tau_{У}(\sigma_2=0) + K_{У}^{\partial}\,\Delta\varepsilon_1^{У} + \Delta\tau_{У}(\sigma_2); \qquad (2)$$

$$\tau_{\Pi} = \tau_{\Pi}(\sigma_2=0) + K_{\Pi}^{\partial}\,\Delta\varepsilon_1^{\Pi} + \Delta\tau_{\Pi}(\sigma_2). \qquad (3)$$

## УСЛОВИЕ ВЫХОДА ПАСПОРТОВ ПРОЧНОСТИ И УПРУГОСТИ НА УЧАСТОК НЕЗАВИСИМОСТИ ОТ БОКОВОГО ДАВЛЕНИЯ

Поскольку упрочнение материала от действия $\sigma_2$ связано с наличием в нем площадок отрыва $B$, выясним, при каких условиях происходит их исчезновение.

На всех графиках зависимости пределов упругости $\tau_{У}$ и пределов прочности $\tau_{\Pi}$ от величины бокового давления для ряда горных пород, полученных в эксперименте (рис.5), увеличение предела упругости и предела прочности с ростом $\sigma_2$ наблюдается до тех пор, пока уровень бокового давления $\sigma_2$, при котором происходит испытание материала, не станет равным пределу упругости или пределу прочности, т.е. пока не произойдет пересечение графиков $\tau_{У}$ и $\tau_{\Pi}$ с графиком $\sigma_2$. Условия в точке пересечения таковы: $\tau_{У} \approx \sigma_{2кр}^{У}$ и $\tau_{\Pi} \approx \sigma_{2кр}^{\Pi}$. Более высокие давления $\sigma_2$ практически не упрочняют материал. Объяснить подобное поведение неоднородных твердых тел можно с позиций статистического подхода к процессу их дефор-

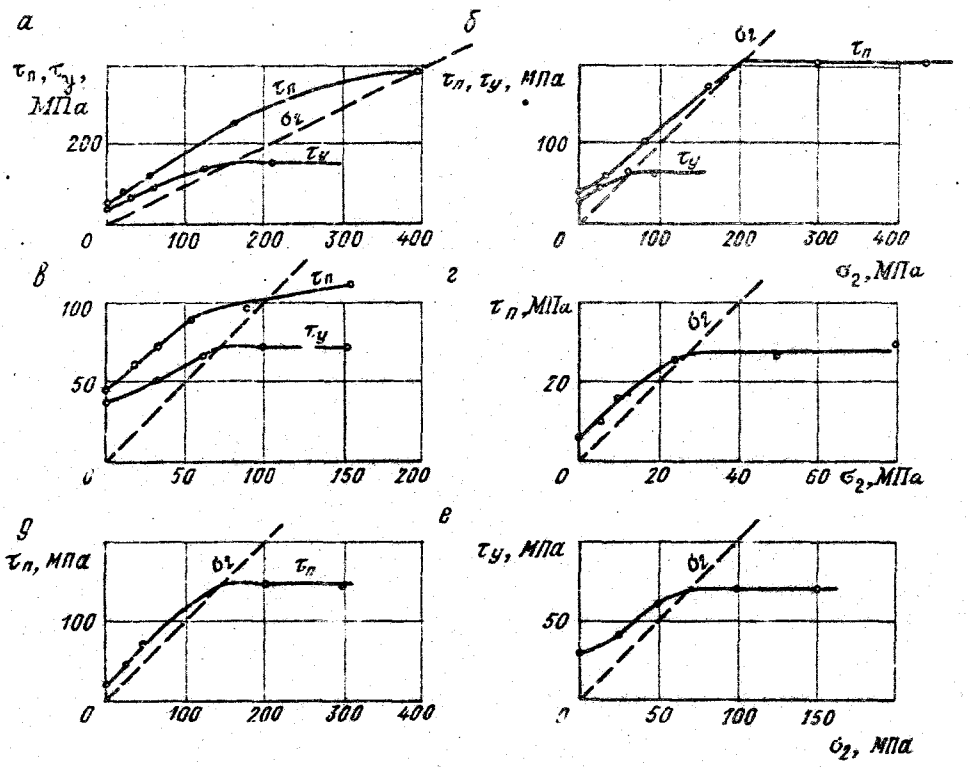



Рис.5. Зависимость $\tau_п$ и $\tau_у$ от $\sigma_2$ для мрамора I (а) и II (б), талькохлорита ( ), бурого угля (г), белого кирпича (д) и мрамора месторождения Коелга (е)

мации. Механизм этого явления одинаков для пределов упругости и прочности, поэтому рассмотрим данную ситуацию на примере упругости, а выводы можно распространить на ситуацию, возникающую на пределе прочности.

Для того, чтобы можно было объяснить данное явление, необходимо привести в соответствие с полученными в последнее время результатами экспериментальных исследований следующие положения модели А.Н.Ставрогина:

1) с ростом $\sigma_2$ вплоть до $\sigma_{2кр}$, соответствующего выходу паспортов прочности и упругости на участок, где $\tau_у$ и $\tau_п$ не зависят от бокового давления, размер площадок $b$, уменьшаясь, стремится к нулю, а размер площадок сдвига $a$ остается неизменным;

2) число микроплощадок отрыва $b$, равное числу микроплощадок сдвига $a$, увеличивается вплоть до $\sigma_2 = \sigma_{2кр}$.

В работе [6] показано, что деформационный процесс в горных породах в основном развивается по межзеренному пространству, являющемуся наиболее слабым звеном в структуре материала. Деформации сдвига, осуществляемые по контактам зерен, на несколько порядков могут превосходить деформации в самих зернах, при этом зерно сохраняет целостность как структурная еди-

ница. Это наблюдалось и при $\sigma_2 < \sigma_{2кр}$, и при $\sigma_2 > \sigma_{2кр}$. Данный результат позволяет считать, что минимальный размер площадок отрыва $b$ определяется размером зерна, как и минимальное расстояние между двумя соседними плоскостями сдвига $\omega$. Уменьшение площадок отрыва до исчезающе малых размеров привело бы к истиранию зерен материала в пыль.

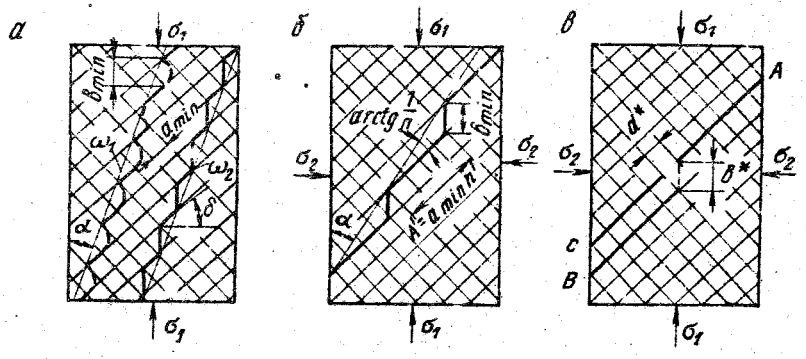



Рис.6. Принцип образования плоскостей сдвига $\omega$ под разными углами $\alpha$ и при увеличивающемся давлении $\sigma_2$

Рассмотрим плоскость сдвига $\omega$, составленную из минимальных по размеру микроплощадок сдвига $a_{min}$ и отрыва $b_{min}$ (рис.6,а). Квадратики, на которые разделено поле образца, символизируют зерна. Площадки отрыва и сдвига формируются в основном по контактам зерен. Угол $\alpha$ наклона плоскости $\omega$, состоящей из минимальных площадок сдвига и отрыва, составляет примерно $18^0$. Как показал анализ характера разрушения 40 разновидностей горных пород, помещенных в каталог [2], угол $\alpha$ наклона плоскостей разрушения, образующихся при одноосном сжатии, меняется от 18 до $35^0$. Плоскости, образующиеся под углом $\alpha > 18^0$, в данной модели формируются в результате слияния минимальных площадок сдвига $A$, с образованием протяженных площадок сдвига с размером $A' = a_{min}n$ (рис.6,б). Чем выше уровень бокового давления $\sigma_2$, тем большее количество элементов $a_{min}$ входит в состав площадки $A$, при этом количество площадок отрыва $B$ уменьшается. При давлении $\sigma_2 = \sigma_{2кр}$ исчезает последняя площадка отрыва и плоскость $\omega$ образуют только элементы сдвига. Это состояние соответствует достижению горизонтального участка паспортов упругости и прочности. Дальнейшее увеличение $\sigma_2$ не в состоянии упрочнить эту плоскость, ввиду отсутствия в ней площадок отрыва $B$.

Уравнение равновесия на площадке сдвиг-отрыв при больших площадках сдвига $A'$ имеет вид

$$a^2 n \tau = a^2 n \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \tau_{1i}}{n} + \sigma_p a b \cos\delta + \sigma_2 a b \cos\delta, \qquad (4)$$

где $\tau_{1i}$ – прочность на сдвиг микроэлемента $i$.

Во всех этих случаях площадка отрыва имеет минимальный размер, который можно определить так: $b = a/\sin\delta$. Так как $\delta = 45^0$, то $b\sin\delta = b\cos\delta = a$.

В этом случае уравнение (4) упростится:

$$\tau = \left( \sum_{i=1}^{i=n} \tau_{1i} + \sigma_p + \sigma_2 \right) / n \ ;$$

при $n = 1$ $\tau = \tau_1 + \sigma_p + \sigma_2$, а при отсутствии площадок отрыва $\tau = \sum_{i=1}^{i=n} \tau_{1i} / n$.

Если речь идет о предельном значении прочности материала $\tau_n$, величины $\tau_{1i}$ представляют собой предельные значения сопротивления по каждой из входящих в площадку $A'$ элементарных площадок сдвига $A$. В случае рассмотрения предела упругости $\tau_y$ величины $\tau_{1i}$ представляют собой значения сопротивлений, достигнутые на площадках $A$ в момент образования первой плоскости $\omega$, и могут существенно превосходить собственные пределы упругости.

Ситуация, когда включившихся в процесс пластической деформации элементов $A$ столько, что образование плоскости $\omega$ возможно либо по ломаной линии $AB$ с образованием одной плоскости отрыва $B$, либо по прямой $AC$, является критической (см. рис.2,в и 6,в). Для того, чтобы процесс деформации пошел по линии $AC$ необходимо достижение предела упругости на элементе $a^*$. Для развития деформации по линии $AB$ необходимо достижение предельного сопротивления по площадке $b^*$. Последняя плоскость отрыва образуется на контакте с самым слабым элементом $A$, так как здесь возникают наибольшие отрывные напряжения (см. рис.2,в). Если прочность этого элемента $a$ $\tau_1 = 0$ или близка к нему, то сопротивление по плоскости отрыва $B$ будет определяться величинами $\sigma_p$ и $\sigma_2$. Напряжения, которые возникают в теле в момент образования первой плоскости $\omega$, равны $\tau_y$, а в данном случае, соответствующем условию выхода паспорта упругости на горизонтальный участок, $\tau_y^г$. Предел упругости последнего элемента $a^*$, включающегося при этом напряжении в процесс пластической деформации, тоже будет равен этому значению или, во всяком случае, близок к нему, т.е. $\tau_{y1}^* \approx \tau_y^г$. Условие переходной, критической ситуации, при которой происходит исчезновение последней плоскости отрыва $B$ и образование плоскости $\omega$, состоящей только из элементов сдвига $A$, запишем в виде

$$\sigma_p + \sigma_{2кр}^у = \tau_{y1}^* \approx \tau_y^г \ .$$

Принимая во внимание, что значение $\sigma_p$ по сравнению со значением $\tau_y^г$ (и тем более с $\tau_n$) для горных пород является величиной очень малой, можно считать

$$\sigma_{2кр}^у \approx \tau_y^г \ . \qquad (5)$$

Таким образом, теоретически полученное условие (5) выхода паспорта упругости на горизонтальный участок согласуется с экспериментальными результатами (см. рис.5) и объясняет их.

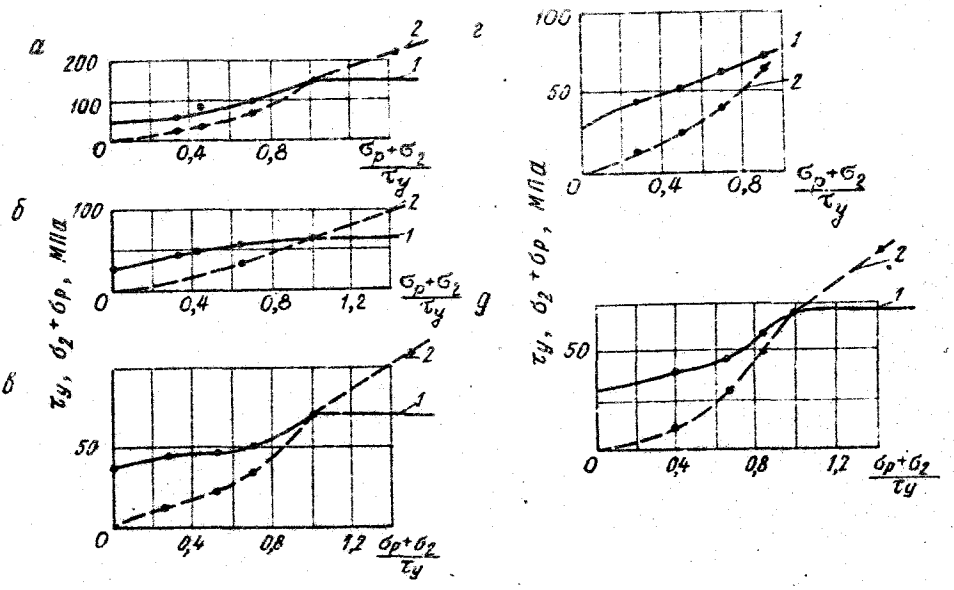



Рис.7. Зависимость $\tau_y$ (1) и $\sigma_2 + \sigma_p$ (2) от $(\sigma_2 + \sigma_p)/\tau_y$ для мрамора I (а) и II (б), талькохлорита (в), известняка (г) и мрамора месторождения Коелга (д)

Паспорта упругости и прочности в координатах $\tau_y - (\sigma_p+\sigma_2)/\tau_y$ и $\tau_п - (\sigma_p+\sigma_2)/\tau_п$ (рис.7 и 8) раскрывают физические причины перехода от участка зависимости предела упругости и прочности от $\sigma_2$ к участку независимого их поведения. Переход от первой стадии ко второй происходит при $(\sigma_p+\sigma_2)/\tau_y = 1$ и $(\sigma_p+\sigma_2)/\tau_п = 1$. Ввиду своей физической обоснованности координаты являются универсальными для всех неоднородных твердых тел. Изображение паспортов прочности и упругости в них позволяет прогнозировать условия, при которых горная порода будет вести себя как однородная пластичная среда, процесс деформации которой будет протекать без развития в ней порового пространства.

## ВЫВОДЫ

1. На основании анализа результатов экспериментальных исследований внесены изменения в статистическую модель А.Н.Ставрогина, имеющие принципиальный характер и дающие возможность объяснить ряд специфических свойств деформируемого неоднородного твердого тела.

2. Опираясь на статистические представления о строении горных пород и о процессе их деформации, дано наиболее полное объяснение факта увеличения пределов прочности и упругости с ростом бокового давления.

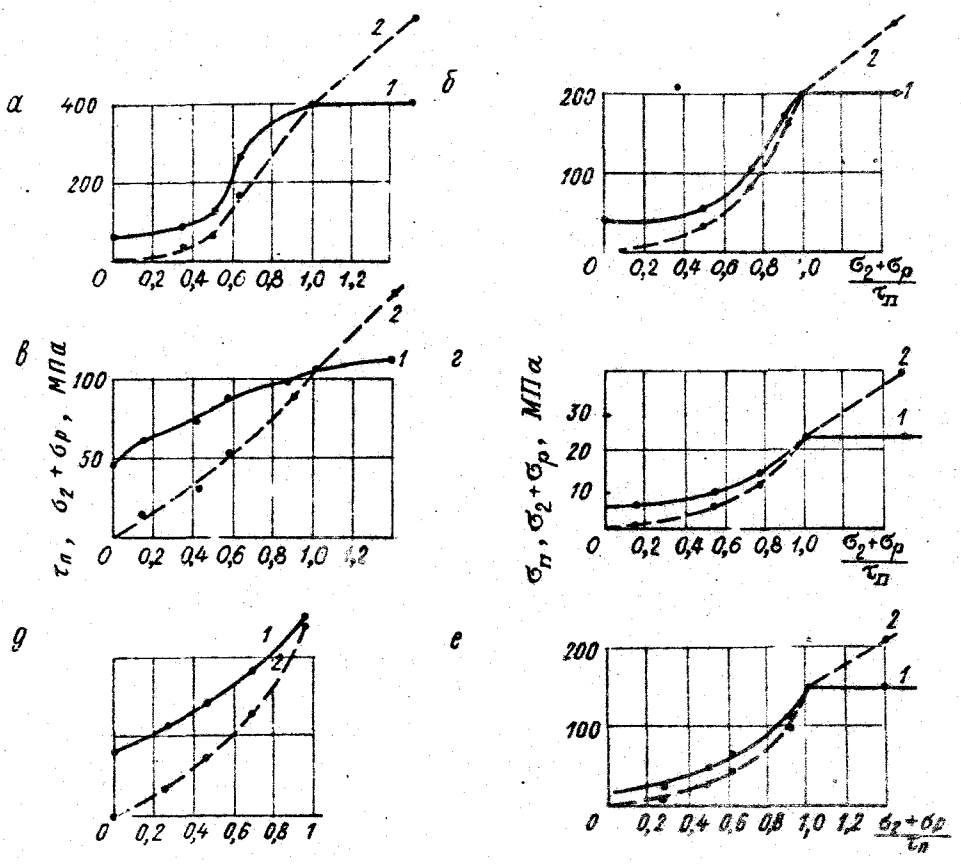



Рис.8. Зависимость $\tau_п$ (1) и $\sigma_2 + \sigma_р$ (2) от $(\sigma_2 + \sigma_р)/\tau_п$ для мрамора I (а) и II (б), талькохлорита (в), бурого угля (г), известняка (д) и белого кирпича (е)

3. Выявлены условия, при которых происходит смена зависимого состояния $\tau_п$ и $\tau_у$ от $\sigma_2$ на состояние, в котором $\sigma_2$ перестает влиять на предельные прочностные и упругие свойства материала, и предложен механизм этого явления.

4. Предложены единые для всех пород и других неоднородных тел координаты для изображения паспортов прочности и упругости, которые отражают физические причины перехода от участка зависимого $\tau_п$ и $\tau_у$ от $\sigma_2$ к участку независимого поведения.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. Прочность и деформация горных пород в допредельной и запредельной областях / А.Н.Ставрогин, Б.Г.Тарасов, О.А.Ширкес, Е.Д.Певзнер // ФТПРПИ. 1982. № 5.

2. Ставрогин А.Н. Исследование предельных состояний и деформаций горных пород // Физика Земли. 1969. № 12.

3. Ставрогин А.Н., Георгиевский В.С. Каталог механических свойств горных пород / ВНИМИ. Л., 1968.

4. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979.

5. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах. М.: Недра, 1985.

6. Ставрогин А.Н., Тарасов Б.Г., Ширкес О.А. Статистическая модель деформации неоднородных твердых тел (горных пород) в условиях высоких давлений и больших деформаций // ФТПРПИ. 1990. № 1.