Записки Ленинградского горного института им.Г.В.Плеханова.
Т. 126. Л., 1991

УДК 534:531

# ФРИКЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ ДВУХМАССОВЫХ ТОРМОЗНЫХ УСТРОЙСТВ

М.М.ВЕТЮКОВ, Р.Ф.НАГАЕВ, М.Ю.ПЛАТОВСКИХ

В статье рассматривается динамика тормозных устройств, к которым могут быть отнесены фрикционный тормозной механизм (рис.I,а), механизм сцепления на этапе проскальзывания (рис.I,б) и некоторые другие. Их можно моделировать двухмассовой колебательной системой трущихся тел (рис.I,в), верхнее из которых через пружину протягивают со скоростью $v$ по нижнему, а последнее может скользить без трения по основанию. С помощью одного из современных методов нелинейной механики – метода осреднения[x] – исследуются фрикционные автоколебания в системе, т.е. колебания, вызванные существованием зависимости силы трения от относительной скорости тел. В частности, показано существование режимов колебаний, при которых нижняя масса находится практически в покое, а верхняя колеблется, и наоборот. Этот результат, по-видимому, является новым в теории фрикционных автоколебаний и может быть использован для устранения нежелательных колебаний одного из двух тел пары трения.

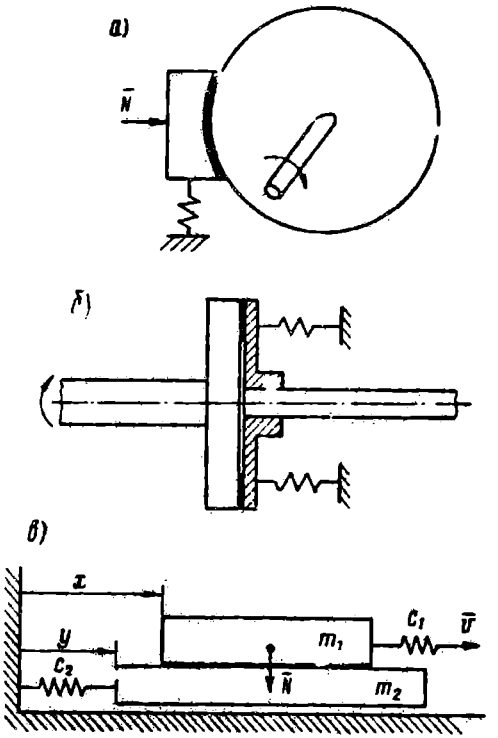



Рис.1. Тормозное устройство

Запишем уравнение движения системы (рис.I,в) в виде

$$m_1\ddot{x}+c_1(x-vt)=-F;\ m_2\ddot{y}+c_2y=F, \quad (I)$$

[x] Волосов В.М., Моргунов Б.К. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971.

где $t$ – время; $F$ – величина силы трения, остальные обозначения ясны из рис.I,в.

Относительно силы $F$ предполагаем, что $F=f(V)N$, причем зависимость коэффициента трения $f$ от относительной скорости тел $V=\dot{x}-\dot{y}$ принимается кубической, как это часто делается при изучении фрикционных автоколебаний[x] (рис.2):

$$f=f(V)=f^*-aV+bV^3$$

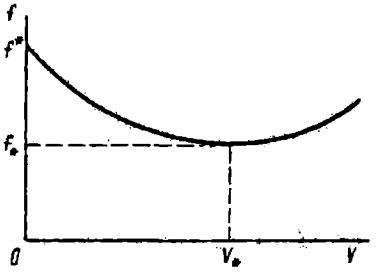



Рис.2. Зависимость коэффициента трения от относительной скорости тел

В дальнейшем считаем, что $V>0$.

В уравнениях (I) введем безразмерное время и координаты по формулам

$$\tau=\sqrt{\frac{c_1+c_2}{m_1+m_2}}\,t;\quad \xi=\frac{c_1+c_2}{2Nf_*}\,x;$$

$$\eta=\frac{c_1+c_2}{2Nf_*}\,y$$

и обозначим безразмерные параметры

$$\varkappa=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2};\quad \mu=\left(\frac{c_1}{m_1}-\frac{c_2}{m_2}\right)\frac{m_1+m_2}{2(c_1+c_2)};\quad \varepsilon=\frac{f^*-f_*}{2f_*};$$

$$\sigma=\frac{v^*}{2Nf_*}\sqrt{(c_1+c_2)(m_1+m_2)};\quad \gamma=\frac{v^*}{V_*\sigma}, \tag{2}$$

где $\sigma$ – безразмерная скорость равномерного движения верхнего тела (при отсутствии колебаний); $\varepsilon$ – параметр, отражающий изменение характеристики трения (рис.2), который далее считаем малым. Уравнения (I) примут вид

$$\xi''+\left[1+\mu(1+\varkappa)\right](\xi-\sigma\tau)=-\frac{\Phi}{1-\varkappa};$$

$$\eta''+\left[1-\mu(1-\varkappa)\right]\eta=\frac{\Phi}{1+\varkappa}, \tag{3}$$

где штрих обозначает производную по $\tau$.

Безразмерная сила трения

$$\Phi=\frac{F}{Nf_*}=1+2\varepsilon-\varepsilon\gamma(\xi'-\eta')\left[3-\gamma^2(\xi'-\eta')^2\right]. \tag{4}$$

---

[x] Кргегельский И.В., Гитис Н.В. Фрикционные автоколебания. М.: Наука, 1987.

Движения в системе складываются из равномерного движения верхней массы и колебаний верхней и нижней масс, которым отвечают переменные составляющие координат $\xi_1, \eta_1$. При этом полные значения координат $\xi = \sigma\tau + \xi_0 + \xi_1$, $\eta = \eta_0 + \eta_1$, где значения постоянных составляющих (т.е. смещений тел при отсутствии колебаний) несложно определить, полагая в выражениях (3), (4) $\xi = \sigma\tau + \xi_0$, $\eta = \eta_0$. Основной интерес далее представляют колебательные составляющие, для которых примем

$$\xi_1 = 0{,}5\left[u + (1+\varkappa)w\right], \quad \eta_1 = 0{,}5\left[w - (1-\varkappa)u\right]. \tag{5}$$

Для новых переменных $u$, $w$ из (3), (4) получаем уравнения

$$\begin{aligned} u'' + u + \mu(w + 2\varkappa u) &= \varepsilon \frac{2\gamma}{1-\gamma^2}\Psi(u'); \\ w'' + w + \mu(1-\varkappa)u &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где переменная составляющая силы трения зависит только от $u'$ и равна

$$\Psi = u'\left[3(1-\gamma^2\sigma^2) - 3\sigma\gamma^2 u' - \gamma^2 u'^2\right].$$

Будем рассматривать далее случай основного резонанса, когда собственные частоты трущихся тел близки $\sqrt{c_1/m_1} \approx \sqrt{c_2/m_2}$. Тогда параметр $\mu$ согласно уравнениям (2) окажется малым, и будем считать его малой величиной того же порядка, что $\varepsilon$. С помощью замены переменных Ван-дер-Поля

$$\begin{aligned} u &= a\cos\varphi, \quad u' = -a\sin\varphi, \\ w &= b\cos\phi, \quad w' = -b\sin\phi \end{aligned} \tag{7}$$

уравнения (6) приведем к стандартной форме

$$\begin{aligned} a' &= -\mu F_1 \sin\varphi, \quad b' = -\mu F_2 \sin\phi, \\ \varphi' &= 1 - \frac{\mu}{a}F_1\cos\varphi, \quad \phi' = 1 - \frac{\mu}{b}F_2\cos\phi, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$F_1 = \delta\Psi(-a\sin\varphi) - b\cos\phi - 2\varkappa a\cos\varphi;$$

$$F_2 = -(1-\varkappa^2)a\cos\varphi; \quad \delta = \frac{2\gamma}{1-\varkappa^2}\frac{\varepsilon}{\mu}.$$

Введя далее в уравнениях (8) в соответствии с методом осреднения медленную расстройку $\theta = \phi - \varphi$ и осредняя правые части этих уравнений по быстрой переменной $\varphi$, получим для медленных переменных в первом приближении следующие уравнения:

$$a' = \frac{\mu}{2}\left[3\delta a\left(1 - \gamma^2\sigma^2 - \frac{1}{4}\gamma^2 a^2\right) - b\sin\theta\right];$$

$$b' = \frac{\mu}{2}(1-\varkappa^2)a\sin\theta; \qquad (9)$$

$$\theta' = \frac{\mu}{2}\left[\frac{a}{b}(1-\varkappa^2) - \frac{b}{a}\right]\cos\theta - \mu\varkappa.$$

Периодическим режимам колебаний в исходной системе отвечают стационарные решения уравнений (9), для определения которых следует их правые части приравнять нулю. Полученные при этом трансцендентные уравнения имеют решение в случае $1-\gamma^2\sigma^2 \geqslant 0$. Из последней формулы (2) видно, что при этом должно быть $v \leqslant V_*$, т.е. колебания здесь существуют, когда значения скорости $v$ находятся на спадающем участке характеристики трения. Стационарные решения уравнений (9) будут тогда двух типов:

$$\theta_1^* = 0, \quad a^* = \pm\frac{2}{\gamma}\sqrt{1-\gamma^2\sigma^2}, \quad b_1^* = \pm(1-\varkappa)a^*; \qquad (10)$$

$$\theta_2^* = \pi, \quad a^* = \pm\frac{2}{\gamma}\sqrt{1-\gamma^2\sigma^2}, \quad b_2^* = \pm(1+\varkappa)a^*$$

Если перейти теперь по формулам (5) к координатам масс $\xi_1$, $\eta_1$, то для их амплитуд колебаний соответственно получим две пары значений:

$$A_\xi = \pm a^*, \quad A_\eta = 0;$$
$$A_\xi = 0, \quad A_\eta = \pm a^* \qquad (11)$$

Физический смысл имеют, очевидно, положительные значения амплитуд. Таким образом, в резонансном случае реализуются лишь такие режимы периодических движений исходной системы, когда одна из масс совершает колебания с конечной амплитудой, а вторая покоится в первом приближении, и наоборот. Размерная амплитуда колебаний в обоих случаях оказывается одинаковой, и, с точностью до слагаемых порядка $\mu$, из формул (2), (11) для нее найдем

$$A = 2V_*\sqrt{m_1/c_1}\sqrt{1-\gamma^2\sigma^2} \qquad (12)$$

Исследуя устойчивость стационарных решений (10) обычным образом, т.е. составляя для них по уравнениям (9) характеристическое уравнение (оно будет третьего порядка) и исследуя его корни с помощью критерия Рауса – Гурвица, можно показать, что в обоих случаях решения (10) устойчивы, а значит устойчивы и оба режима колебаний в исходной системе. В связи с этим следу-

ет пояснить смысл замены переменных (5). Дело в том, что построение периодических решений исходной системы в переменных $\xi_1$, $\eta_1$ по методу осреднения приводит для амплитуд колебаний к тем же значениям (II), однако разность фаз $\theta$ при этом остается неопределенной. Провести в этом случае исследование устойчивости оказывается затруднительно.

Вопрос о том, какой из двух найденных режимов автоколебаний реализуется в действительности, требует дополнительного исследования, так как это зависит не только от параметров системы, но и начальных условий движения. Рассмотрим случай, когда в момент $t = 0$ система покоилась. Далее на некотором начальном этапе будет происходить движение масс как единого целого до того момента, пока сила трения между ними не достигнет максимального значения $F_{max} = f^* N$, после чего начнется раздельное движение. Обозначив этот момент срыва в безразмерном времени $\tau_c$, на начальном этапе $0 \le \tau \le \tau_c$ будем иметь $\xi = \eta_1$. Из уравнений движения (3) на этом этапе получим уравнение для координаты $\xi$ и выражение для безразмерной силы трения покоя

$$\xi'' + \xi = \frac{1}{2}(1-\varkappa)\sigma\tau; \qquad (13)$$

$$\Phi = \frac{1}{2}(1-\varkappa^2)\sigma\tau. \qquad (14)$$

Интегрируя уравнение (13) при нулевых начальных условиях, найдем закон движения на этапе совместного движения масс

$$\xi = \frac{1}{2}(1-\varkappa)\sigma(\tau - \sin\tau). \qquad (15)$$

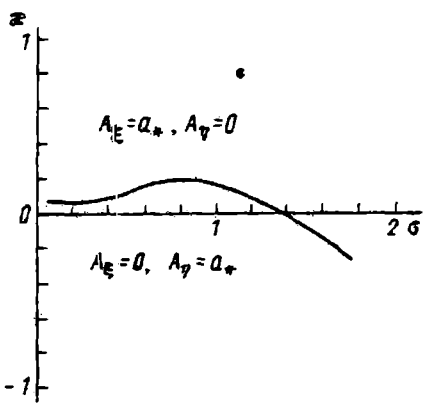



Рис.3. Граница, разделяющая режимы колебаний при $\sigma/\mu = 1$ и $\gamma = 0{,}5$

Из равенства (14), полагая в первом приближении в момент срыва $\Phi = 1$, получим $\tau_c = 2/(1-\varkappa^2)\sigma$. Подставляя это значение в выражение (15) и учитывая введенные ранее переменные $u$, $u'$, для них в момент времени $\tau = \tau_c$ можно получить начальные условия:

$$u = \frac{2}{1-\varkappa^2} - \sigma\tau_c; \qquad u' = -\sigma;$$

$$w = -\sigma(1-\varkappa)\sin\tau_c; \qquad w' = -\sigma(1-\varkappa)\cos\tau_c.$$

Для медленных переменных $\dot{a}$, $b$ и $\theta$ в соответствии с формулами (7) будем иметь при $\tau = \tau_c$ условия

$$a = \sigma; \quad b = (1 - \varkappa)\sigma,$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \tau_c - \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{-\sigma\tau_c + 2/(1 - \varkappa^2)}. \tag{16}$$

Численное интегрирование уравнений (9) при этих начальных условиях позволяет определить, какой из режимов колебаний реализуется, и построить на плоскости параметров границу, разделяющую режимы. Соответствующая граница на плоскости $(\sigma, \varkappa)$ при $\varepsilon/\mu = 1$ построена для значения $\gamma = 0{,}5$ на рис.3.