Записки Ленинградского горного института им.Г.В.Плеханова.
Т. 126. Л., 1991

УДК 621.039.72

СОПРОТИВЛЕНИЕ СЛОЯ ОТЛОЖЕНИЙ НА СТЕНКЕ ПРИ РАЗРУШЕНИИ СТРУЕЙ ВОДЫ

К.Г.АСАТУР, И.И.ДОРОШЕНКО, В.В.ШИЛОВ

При исследовании напряжений в отложениях тонкий слой на металлической стенке рассматривается как упругая среда лежащая на абсолютно жестком основании. Задача является осесимметричной (круглая струя).

Уравнения теории упругости в цилиндрической системе координат (z, r, θ) имеют вид[x]

$$\frac{\partial}{\partial r} Du + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (1-\alpha)\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \alpha D\frac{\partial w}{\partial z} + (1-\alpha)D\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad (I)$$

где u, w – смещения среды по осям r, z;

$$\alpha = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)};$$

оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r};$$

ν – коэффициент Пуассона.

Давление круглой струи на плоскую преграду выражается зависимостью[xx]

$$p = \frac{p r_0}{2\pi (r_c^2 + r^2)^{3/2}},$$

где r_0 – радиус струи; P – сила давления струи на преграду,

$$P = 2\pi p_0 r_0^2 = \pi \rho r_0^2 v_0^2,$$

[x] Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1968.

[xx] Асатур К.Г. Механика разрушения горных пород высоконапорными струями / Ленинградский горный ин-т. Л., 1985.

ρ – плотность жидкости; p_c – давление жидкости перед соплом; v_c – скорость истечения.

Граничные условия задачи следующие. На верхней поверхности слоя (при $z = 0$) нормальные напряжения $\sigma_z = p$, касательные напряжения $\tau_{rz} = 0$, отсюда

$$2G\left[\frac{1-\nu}{2(1-\nu)}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\nu}{2(1-\nu)}Du\right]_{z=0}=p, \tag{2}$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{z=0}=0, \tag{3}$$

где G – модуль сдвига.

На нижней поверхности на контакте с абсолютно жесткой плитой при $z = h$ смещения по оси z должны равняться нулю, т.е.

$$w\Big|_{z=0}=0. \tag{4}$$

Решение ищем в виде интегралов Фурье – Бесселя:

$$\begin{aligned} u &= \int_0^\infty A(z)J_1(kr)dk, \\ w &= \int_0^\infty B(z)J_0(kr)dk, \end{aligned} \tag{5}$$

где $J_0(kr)$ и $J_1(kr)$ – цилиндрические функции соответственно нулевого и первого порядка; k – аргумент преобразования Ханкеля; $A(z), B(z)$ – искомые функции, которые должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d^4A}{dz^4}-2k^2\frac{d^2A}{dz^2}+k^4A=0,$$

$$\frac{d^4B}{dz^4}-2k^2\frac{d^2B}{dz^2}+k^4B=0$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} A &= (ka_1z+b_1)e^{-kz}+(ka_2z+b_2)e^{kz}; \\ B &= (kc_1z+d_1)e^{-kz}+(kc_2z+d_2)e^{kz} \end{aligned} \tag{6}$$

Для определения значений $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ подставим функции (5) с учетом соотношений (6) в систему (I) и получим

$$\left[k(c_1-\alpha)z+4a_1\nu-b_1-2a_1+d_1-c_1\right]e^{-kz}+\left[k(c_2+a_2)+4a_2\nu+\right.$$
$$\left.+b_2-?a_2-d_2+c_2\right]e^{kz}=0;$$
$$\left[k(c_1-a_1)z+4c_1\nu+d_1-4c_1-b_1+a_1\right]e^{-kz}+\left[k(c_2+a_2)-4c_2\nu+\right.$$
$$\left.+4c_2+d_2+b_2+a_2\right]e^{kz}=0.$$

Так как эти уравнения должны удовлетворяться при любых значениях k, из них вытекают следующие соотношения:

$$c_1=a_1;\quad d_1-b_1=(3-4\nu)a_1;$$
$$c_2=-a_2;\quad d_2+b_2=(3-4\nu)a_2. \tag{7}$$

Аналогичные подстановки в условия (2), (3), (4) с учетом интегрального соотношения

$$\frac{r_0}{(r_0^2+r^2)^{3/2}}=\int_0^\infty k e^{-kr_0}J_0(kr)dk$$

дают на границе $z=0$

$$(c_1-d_1)(1-\nu)+(c_2+d_2)(1-\nu)+(b_1+b_2)\nu=-\frac{1-2\nu}{4\pi G}pe^{-kr_0};$$

$$c_1+d_2+b_1-b_2-c_1-a_2=0,$$

а на границе $z=h$

$$(d_1+kc_1h)e^{-kr_0}+(d_2+kc_2h)e^{kr_0}=0.$$

Из этих выражений с учетом формул (7) вытекают следующие соотношения

$$d_1+b_1+d_2-b_2-a_1-a_2=0;$$
$$(a_1-d_1-a_2+d_2)(1-\nu)+(b_1+b_2)\nu=-\frac{1-2\nu}{4\pi G}pe^{-kr_0}; \tag{8}$$

$$d_1=-kha_1;\quad d_2=kha_2 \tag{9}$$

Система (7), (8), (9) состоит из 8 уравнений, включающих 8 неизвестных: a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2. Поскольку c_1 и d_1 выражены через a_1, а c_2 и d_2 через a_2, можно из выражений (7) и (9) получить соотношения

$$b_1=-\left[kh+(3-4\nu)\right]a_1=\lambda_1 a_1;$$
$$b_2=\left[-kh+(3-4\nu)\right]a_2=\lambda_2 a_2. \tag{10}$$

После всех подстановок уравнения (8) примут вид

$$M_1 a_1 + M_2 a_2 = 0,$$
$$N_1 a_1 + N_2 a_2 = \frac{D}{G},$$

где

$$M_1 = -2kh - 4 + 4\nu;$$
$$M_2 = 2kh - 4 + 4\nu;$$
$$N_1 = -2\cdot kh - 4\nu + 4\nu^2 + kh + 1; \qquad (11)$$
$$N_2 = -2\nu kh + 4\nu - 4\nu^2 + kh - 1;$$
$$D = -\frac{1-2\nu}{4\pi} p e^{-kr};$$

отсюда

$$a_1 = c_1 = \frac{M_2 D}{\Delta G}; \quad a_2 = -c_2 = -\frac{M_1 D}{\Delta G}, \qquad (12)$$

где

$$\Delta = N_1 M_2 - N_2 M_1. \qquad (13)$$

Определим наибольшие касательные напряжения по оси струи по формуле

$$\tau = G(\varepsilon_\theta - \varepsilon_z), \qquad (14)$$

где ε_z, ε_θ – деформации по соответствующим осям координат,

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}.$$

Тогда, поскольку по оси z

$$J_0(kr)\Big|_{r=0} = 1, \quad \frac{J_1}{kr}\Big|_{r=0} = \frac{1}{2},$$

из формул (5) с учетом выражений (6), получим

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[(k^2 a_1 z + k b_1) e^{-kz} + (k^2 a_2 z + k b_2) e^{kz}\right] dk;$$
$$\varepsilon_z = \int_0^\infty \left[(-k^2 c_1 z - k d_1 + k c_1) e^{-kz} + (k^2 c_2 z + k d_2 + k c_2) e^{kz}\right] dk \qquad (15)$$

или, с учетом формул (9), (10), (11),

$$\varepsilon_\theta = -\frac{(1-2\nu)p}{8\pi G}\int_0^\infty \frac{(k^2 z + k\lambda_1)M_2 e^{-k(z+r_0)} - (k^2 z + k\lambda_2)M_1 e^{k(z-r_0)}}{\Delta}\,dk;$$

$$\varepsilon_z = -\frac{(1-2\nu)p}{4\pi G}\int_0^\infty \frac{(-k^2 z + k^2 h + k)M_2 e^{-k(z+r_0)} - (-k^2 z + k^2 h - k)M_1 e^{k(z-r_0)}}{\Delta}\,dk; \qquad (16)$$

$$p = 2\pi r_0^2 p_0; \qquad p_0 = \rho\frac{v_0^2}{2}$$

Опасными напряжениями в слое от действия давления являются касательные τ по оси струи. Значения τ получаются подстановкой значений ε_z и ε_θ с учетом формул (11) и (13) в выражение (14).

В качестве примера для расчета принимаем радиус струи $r_0 = 1$ мм, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}25$. Тогда при толщине слоя $h = 1$ мм из выражений (11) имеем

$$M_1 = -2k - 3; \quad M_2 = 2k - 3; \quad N_1 = 0{,}5k + 0{,}25; \quad N_2 = 0{,}5k - 0{,}25;$$

из выражения (13) найдем

$$\Delta = (0{,}5k + 0{,}25)(2k - 3) + (0{,}5k - 0{,}25)(2k + 3),$$

а из соотношений (10)

$$\lambda_1 = -k - 2; \quad \lambda_2 = -k + 2;$$

$$\frac{G\varepsilon_\theta}{p_0} = -\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{(k^2 z - k^2 - 2k)(2k-3)e^{-k(z+1)} - (k^2 z - k^2 + 2k)e^{k(z-1)}}{\Delta}\,dk;$$

$$\frac{G\varepsilon_z}{p_0} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(-k^2 z + k^2 + k)(2k-3)e^{-k(z+1)} - (-k^2 z + k^2 - k)(2k+3)e^{k(z-1)}}{\Delta}\,dk.$$

Определим значения τ на поверхности слоя при $z = 0$, откуда начинается разрушение, тогда

$$\frac{G\varepsilon_\theta}{p_0} = -\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{-(k+2)(2k-3) - (-k+2)(2k+3)}{\Delta}\,e^{-k}k\,dk;$$

$$\frac{G\varepsilon_z}{p_0} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(k+1)(2k-3) - (k-1)(2k+3)}{\Delta}\,e^{-k}k\,dk. \qquad (17)$$

Вычисление интегралов выполняется на ЭВМ по стандартной программе и дает следующие результаты:

$$\frac{G\varepsilon_\theta}{p_0} = -0{,}2575; \quad \frac{G\varepsilon_z}{p_0} = -0{,}515.$$

Таким образом, главные касательные напряжения в слое, по оси струи в рассматриваемом примере $\tau = G(\varepsilon_6 - \varepsilon_z) = 0{,}2575 p_0 \approx 0{,}26 p_0$. Для разрушения слоя с предельным напряжением на скалывание τ_c при толщине $h_1 =$ $= 1$ мм струей с радиусом $r_c = 1$ мм требуется давление $p_c > 1/0{,}26 \tau_c$. Следует отметить, что разрушение при этом будет происходить по всей толщине слоя отложений, включая границу адгезии, так как напряжения по оси будут близкими друг к другу. Оптимальная скорость скольжения струи по поверхности слоя устанавливается экспериментально.