Записки Ленинградского горного института.
Т. 128. СПб , 1991

УДК 621.313.3

В.А.ДАРТАУ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАШИНЫ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С НАСЫЩЕНИЕМ МАГНИТНОЙ СИСТЕМОЙ

Рассмотрена математическая модель машины переменного тока, позволяющая учесть эффект насыщения магнитной цепи в переходных и установившихся режимах. Рассмотрена трехфазная машина без уменьшения общности.

Уравнения электрического равновесия обмоток статорной цепи для произвольного случая имеют вид

$$\frac{d}{dt}\psi_{AS} = U_{AS} - R_A i_A ; \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_{BS} = U_{BS} - R_B i_B ; \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_{CS} = U_{CS} - R_C i_C . \qquad (3)$$

Умножая уравнения (1)-(3) на 2/3; $2/3e^{j\frac{2\pi}{3}}$; $2/3e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ соответственно и складывая, получим комплексную форму уравнений электрического равновесия статорной цепи машины переменного тока:

$$\frac{d}{dt}\dot{\psi}_S + R_S \dot{I}_S = \dot{U}_S , \qquad (4)$$

где $R_S = R_A = R_B = R_C$ - активные сопротивления фаз статора.

Если питающая сеть несимметрична, то

$$\dot{U}_S = \dot{U}^{(+)} e^{j\frac{2\pi}{3}} + \dot{U}^{(-)} e^{-j\frac{2\pi}{3}} + \dot{U}^{o} \cos\omega_1 t ,$$

где $\dot{U}^{(+)}$, $\dot{U}^{(-)}$, $\dot{U}^{o}$ - комплексные амплитуды прямой, обратной и нулевой последовательности,

$$\dot{U}^{o} = U_{0A} + U_{0B} e^{j\frac{2\pi}{3}} + U_{0C} e^{-j\frac{2\pi}{3}} .$$

Полное потокосцепление фазы, например фазы А:

$$\psi_{AS} = L_{\sigma SA} i_A + \phi_{0A} ,$$

где ϕ_{0A} - потокосцепление от главного магнитного потока машины (потока в зазоре).

Пусть в зазоре магнитное поле имеет распределение $B(\xi)$, где угол ξ отсчитывается от максимума магнитного поля до магнитной оси фазы А. Обмотка удовлетворяет следующим предположениям: обмотка представлена токовым слоем с синусоидально распределенной плотностью; элементарная секция имеет диаметральный шаг и ее плотность равна $q(\eta) = \sin(\eta)d\eta$, где η - угол между стороной секции и магнитной осью фазы А.

Потокосцепление элементарной секции k-й фазы

$$\psi_{k0}(\theta,\eta)d\eta = -l\sin(\eta)\int_{\theta-\eta+\frac{2\pi}{3}}^{\theta-\eta+\frac{2\pi}{3}-\pi} B(\xi)d\xi, \qquad (5)$$

где θ - угол между максимумом магнитного поля в зазоре и магнитной осью фазы А.

Полное потокосцепление обмотки в комплексной форме

$$\dot{\psi}_c(\theta) = \frac{2}{3}\int_0^{\pi}\left[\psi_{A0}(\theta,\eta) + e^{j\frac{2\pi}{3}}\psi_{B0}(\theta,\eta) + e^{-j\frac{2\pi}{3}}\psi_{C0}(\theta,\eta)\right]d\eta. \qquad (6)$$

Заменив переменные в выражениях (5), (6), интегрируя по частям и учитывая 2π - периодичность функции $e^{\pm jz}B(z)$, получим

$$\dot{\psi}_0(\theta) = 2le^{j\theta}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(z)B(z)dz. \qquad (7)$$

Можно сделать выводы: насыщение в машине с синусоидально распределенными обмотками и круговой магнитной симметрией магнитной системы машины влияет только на модуль главного потокосцепления; в установившихся режимах форма токов и ЭДС фаз имеет форму, близкую к синусоидальной, что и подтверждается на практике.

Ясно, что вычисление потокосцепления фаз определяется конструкцией обмоток и распределением магнитного поля, сцепленного с данной фазой, при этом потокосцепления фаз могут быть вычислены:

$$\psi_{k0}(\theta) = -l\sum_{i=1}^{q} W_i \int_{\theta-\eta_i+\frac{2\pi}{3}}^{\theta-\eta_i+\frac{2\pi}{3}-\pi} B(\xi)d\xi,$$

где η_i - угол между стороной i-й секции и магнитной осью k-й фазы; W_i - число витков i-й секции.

Комплексная форма главного потокосцепления определяется в виде

$$\dot{\psi}_0(\theta) = -l\sum_{i=1}^{q} W_i\left\{\sum_{k=0}^{2} e^{j\frac{2\pi k}{3}}\int_{\theta-\eta_i+\frac{2k\pi}{3}}^{\theta-\eta_i+\frac{2k\pi}{3}-\pi} B(\xi)d\xi\right\}. \qquad (8)$$

Учет специальных схем обмоток представляет чисто технические трудности. Все использованные преобразования справедливы как для установившихся, так и для переходных процессов.

Рассмотрим теперь функцию распределения магнитного поля в зазоре $B(\xi)$. Распределение определяется конструкцией обмоток статора и ротора, поэтому, в общем случае, эта функция зависит от углового положения максимума распределения магнитного поля в расточке статора (угол θ), от мгновенного значения напряженности магнитного поля в заданной точке зазора, которая определяется, в свою очередь, угловой координатой и мгновенными токами обмоток статора и ротора:

$$B = B\left(|\dot{I}_0|, \theta, \xi\right),$$

где $|\dot{I}_0|$ - модуль мгновенного эквивалентного намагничивающего тока.

В модели функция $B(\cdot)$ определена как локальное преобразование для каждой угловой точки в расточке статора машины. Простейшим способом определения этой функции является экспериментальное измерение значений магнитного поля в зазоре в зависимости от токов обмоток и углового положения датчика поля.

Для качественного исследования насыщения в переходных и установившихся процессах можно ограничиться следующей моделью насыщения: конфигурация обмоток и магнитной системы машины обеспечивают синусоидальное распределение напряженности магнитного поля в зазоре машины, тогда главное потокосцепление

$$\dot{\psi}_0(\theta) = \frac{2}{\pi} L_m I_{0н} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\eta) F_B\left(i_0 \cos(\eta)\right) d\eta\, e^{j\theta}, \qquad (9)$$

где $L_m I_{0н}$ - базовое потокосцепление зазора машины (модуль главного потокосцепления) на колене кривой намагничивания машины; i_0 - относительный модуль тока намагничивания $|\dot{I}_0| / I_{0н}$ в текущий момент; $F_B(\cdot)$ - нечетная функция насыщения, для линейной функции обобщенный вектор главного потокосцепления имеет вид

$$\dot{\psi}_0(\theta) = L_m |\dot{I}_0|\, e^{j\theta} = L_m \dot{I}_0 = L_m (\dot{I}_S + \dot{I}_R).$$

Математическая модель машины с магнитным насыщением будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}\dot{\psi}_S = -\frac{R_S}{L_{\sigma S}}\dot{\psi}_S + \frac{R_S}{L_{\sigma S}}\dot{\psi}_0 + \dot{U}_S;$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\psi}_R = -\frac{R_R}{L_{\sigma R}}\dot{\psi}_R + j\omega\dot{\psi}_R + \frac{R_R}{L_{\sigma R}}\dot{\psi}_0 + \dot{U}_R;$$

$$\dot{\psi}_0 = \frac{2}{\pi} L_m I_{0н} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\eta) F_B\left(i_0 \cos(\eta)\right) d\eta\, e^{j\theta}; \qquad (10)$$

$$\dot{I}_S=(\dot{\psi}_S-\dot{\psi}_0)/L_{\sigma S};\quad \dot{I}_R=(\dot{\psi}_R-\dot{\psi}_0)/L_{\sigma R};$$
$$\dot{I}_0=\dot{I}_S+\dot{I}_R;\quad i_0=|\dot{I}_0|/I_{0H}.$$

В простейших случаях можно получить аналитические результаты для кривых насыщения, заданных в виде функций угла и относительного тока намагничивания, например для функции:

$$F_B(\eta)=\begin{cases} i_0\cos(\eta), & \left|\frac{\pi}{2}-\eta\right|<\arcsin(i_0^{-1}),\\ \operatorname{sign}(\cos(\eta))\left(1+k\left(i_0\cos(|\eta|)-1\right)\right), & \end{cases}$$

$$\dot{\psi}_0(\theta)=\frac{2}{\pi}L_m I_{0H}\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\eta_0-\frac{1}{2}\sin(2\eta_0)\right)\left(1+\frac{k}{2}\right)i_0+2(1-k)\sin(\eta_0)\right\}e^{j\theta},$$

где $\eta_0=\arccos(i_0^{-1})$.

Для установившихся режимов асинхронной машины принята система уравнений

$$\left(\frac{R_S}{L_{\sigma S}}+j\omega_1\right)\dot{\psi}_S-\frac{R_S}{L_{\sigma S}}\dot{\psi}_0=\dot{U}_S;$$
$$\left(\frac{R_R}{L_{\sigma R}}+j(\omega_1-\omega)\right)\dot{\psi}_R-\frac{R_R}{L_{\sigma R}}\dot{\psi}_0=0;$$
$$\dot{I}_0=\dot{\psi}_S/L_{\sigma S}+\dot{\psi}_R/L_{\sigma R}-(1/L_{\sigma S}+1/L_{\sigma R})\dot{\psi}_0; \qquad (II)$$
$$\dot{\psi}_0=\frac{2}{\pi}L_m\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\eta_0-\frac{1}{2}\sin(2\eta_0)\right)\left(1+\frac{k}{2}\right)+2(1-k)\frac{1}{i_0}\sin(\eta_0)\right\}\dot{I}_0.$$

Преобразуя систему (II), получим систему уравнений:

$$\left(\frac{R_S}{L_{\sigma S}}+j\omega_1\right)\dot{\psi}_S-\frac{R_S L_{\sigma R}}{L_{\sigma S}L_{\sigma S}}\left(\frac{R_R}{L_{\sigma R}}+j(\omega_1-\omega)\right)\dot{\psi}_R=\dot{U}_S;$$
$$-(1-c)\frac{R_R}{L_{\sigma S}}\dot{\psi}_S+\left(c\frac{R_R}{L_{\sigma R}}+j(\omega_1-\omega)\right)\dot{\psi}_R=0;$$
$$c=1-B^*L_m/\left(L_{\sigma R}\left(1+B^*L_m(1/L_{\sigma S}+1/L_{\sigma R})\right)\right); \qquad (I2)$$
$$B^*=\frac{2}{\pi}\frac{1}{i_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(\eta)F_B(i_0\cos(\eta))\,d\eta;$$
$$\dot{\psi}_0=(1-c)L_{\sigma R}(\dot{\psi}_S/L_{\sigma S}+\dot{\psi}_R/L_{\sigma R});\quad \dot{I}_0=(B^*L_m)^{-1}\dot{\psi}_0;$$

в рассматриваемом случае

$$B^* = \frac{2}{\pi}\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \eta_0 - \frac{1}{2}\sin(2\eta_0)\right)\left(1+\frac{k}{2}\right) + 2(1-k)\frac{1}{i_0}\sin(\eta_0)\right\}.$$

Решение системы уравнений (12) требует решения нелинейного уравнения относительно i_0:

$$i_{0(n)} = i_{0(n-1)} - k_y\left(i_{0(n-1)} - |\dot{\psi}_0|(i_{0(n-1)})/\left(B^*(i_{0(n-1)})L_m I_{0H}\right)\right),$$

где коэффициент k_y = 2-5.

Как только i_0 найден, остальные электромагнитные переменные находятся решением линейных алгебраических уравнений:

$$\dot{\psi}_S = \left[c\frac{R_R}{L_{\sigma R}} + j(\omega_1 - \omega)\right]\dot{U}_S/\Delta;$$

$$\dot{\psi}_R = (1-c)\frac{R_R}{L_{\sigma S}}\dot{U}_S/\Delta;$$

$$\dot{I}_S = \left[\left(c-(1-c)\frac{L_{\sigma R}}{L_{\sigma S}}\right)\frac{R_R}{L_{\sigma R}} + j\left(1-(1-c)\frac{L_{\sigma R}}{L_{\sigma S}}\right)(\omega_1-\omega)\right]\dot{U}_S/(L_{\sigma S}\Delta);$$

$$\dot{\psi}_0 = (1-c)\frac{L_{\sigma R}}{L_{\sigma S}}\left[\frac{R_R}{L_{\sigma R}} + j(\omega_1-\omega)\right]\dot{U}_S/\Delta,$$

где

$$\Delta = \left[\left(c-(1-c)\frac{L_{\sigma R}}{L_{\sigma S}}\right)\frac{R_S R_R}{L_{\sigma S}L_{\sigma R}} - \omega_1(\omega_1-\omega)\right] +$$

$$+ j\left[\omega_1 c\frac{R_R}{L_{\sigma R}} + (\omega_1-\omega)\frac{R_S}{L_{\sigma S}}\left(1-(1-c)\frac{L_{\sigma R}}{L_{\sigma S}}\right)\right],$$

электромагнитный момент

$$M_{эм} = \frac{3}{2}p\,\mathrm{Im}\left(\dot{I}_S\dot{\psi}_0^*\right) = \frac{3p(1-c)^2\frac{R_R}{L_{\sigma R}}(\omega_1-\omega)|\dot{U}_S|^2}{2L_{\sigma S}|\Delta|^2}.$$

Результаты расчетов для машины с параметрами R_S = 2·10^{-2} Ом, R_R = = 3·10^{-2} Ом; L_m = 2,8·10^{-2} Гн; $L_{\sigma S}$ = 2·10^{-3} Гн; $L_{\sigma R}$ = 7·10^{-3} Гн приведены на рис.1, 2. Характеристика $B(i_0)$ является универсальной для конкретной машины, лучи, проходящие через точки характеристики, определяют мгновенную индуктивность намагничивающего контура.

При возрастании степени насыщения ток статора растет быстрее, чем момент и модуль главного потокосцепления, что вызывает рост потерь (рис.2), кроме того, модуль главного потокосцепления изменяется от нагрузки в пределах 10-15 %.

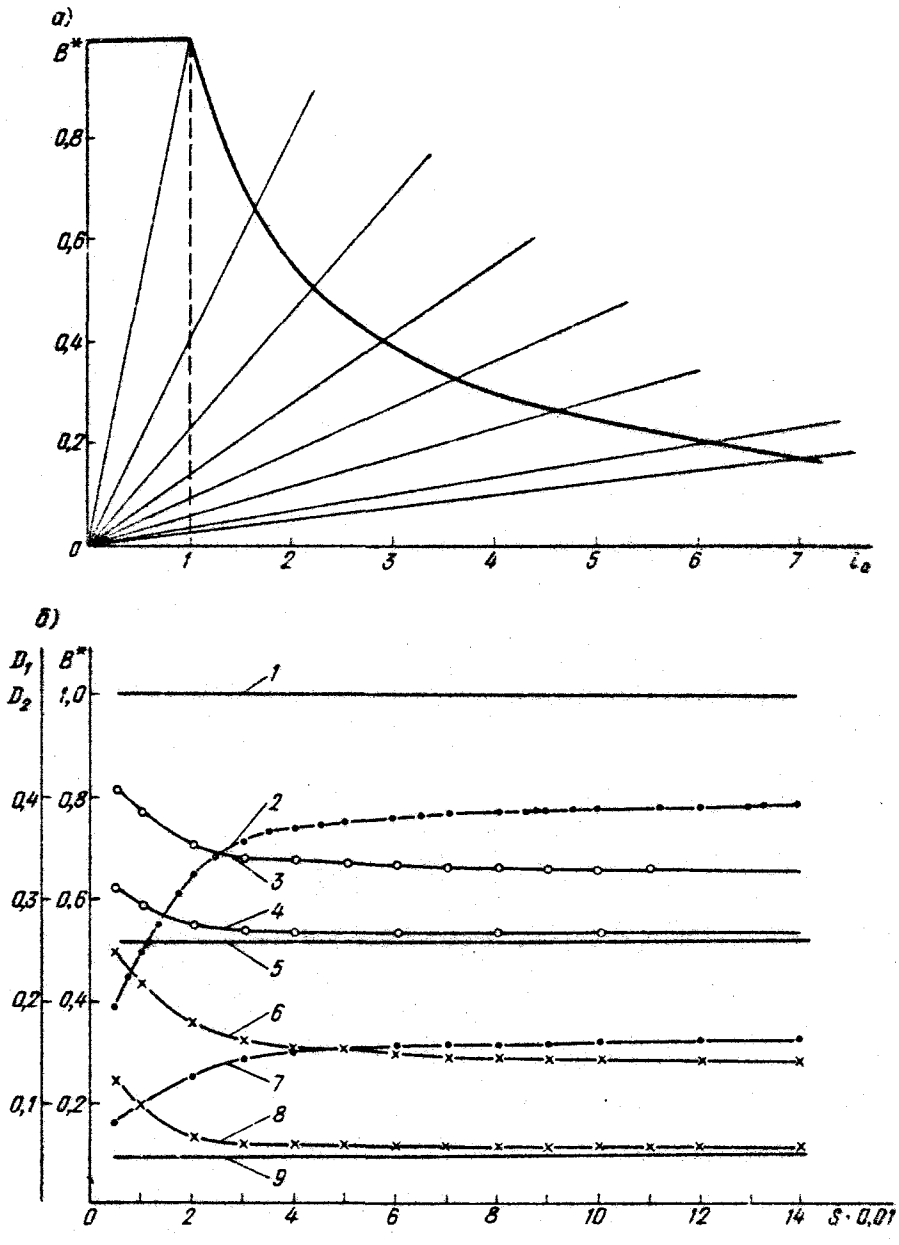


Рис.1. Параметры асинхронной машины с насыщением магнитной системы: а – коэффициент снижения эквивалентной индуктивности B^*; $L_э = B^* L_m$; б – коэффициенты модели асинхронной машины под нагрузкой

1, 5, 9 – машина не насыщена; 2, 4, 8 – $|U_S|/I_{0H} = 12{,}4$; 3, 6, 7 – $|U_S|/I_{0H} = 15{,}5$, для 1, 2, 7: $C - (1-C)L_{\sigma R}/L_{\sigma S}$; для 6 и 8: $1 - (1-C)L_{\sigma R}/L_{\sigma S}$

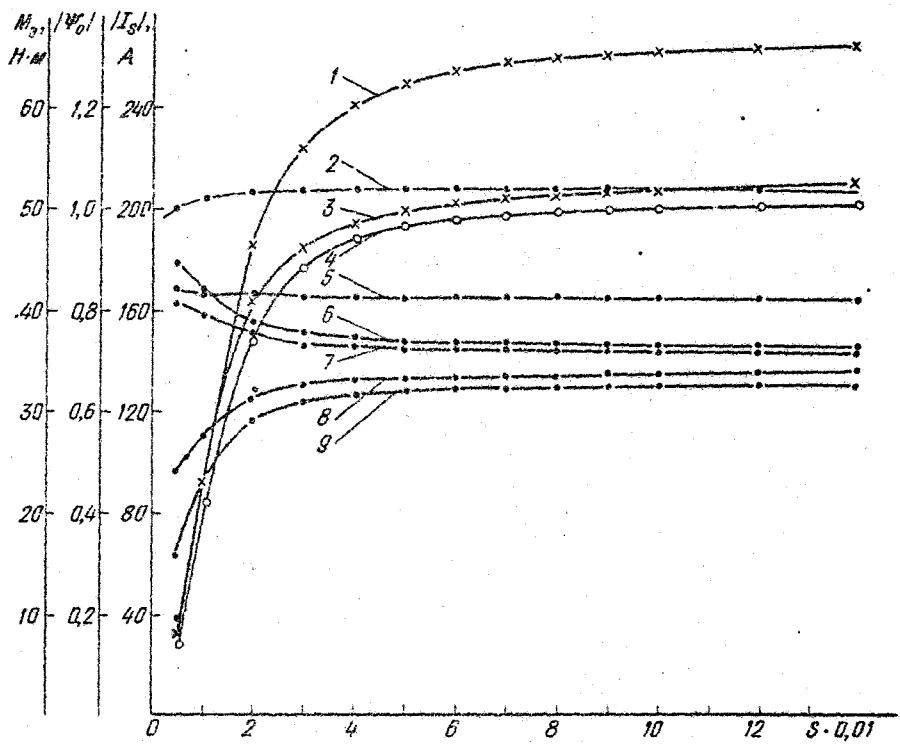


Рис.2. Характеристики ненасыщенной асинхронной машины
1 - μ; 5 - $|\psi_0|$; 9 - i_s; при $|U_s|/I_{он}$ = 15,5: 2 - i_s; 4 - μ; 7 - $|\psi_0|$:
при $|U_s|/I_{он}$ = 12,4: 3 - μ; 6 - $|\psi_0|$; 8 - i_s

Для демонстрации учета магнитной несимметрии рассмотрим явно полюсную синхронную машину. В модели угловое положение ротора (ось d) определяется углом Θ_ψ, отсчитываемым от магнитной оси фазы А статора; магнитная несимметрия для простоты учитывается только второй гармоникой в распределении магнитного поля, распределение магнитного поля в зазоре синусоидальное. При сделанных предположениях потокосцепления фаз статора имеют вид

$$\psi_{k0}(\Theta,\Theta_\psi) = -\frac{2}{\pi}\frac{L_m I_{он}}{1+a}\int\limits_{-\pi/2+\frac{2k\pi}{3}}^{\pi/2+2k\pi/3}\sin(\eta)\left\{\int\limits_{\eta}^{\eta-\pi}\left(1+a\cos\left(2(\xi-\Theta_\psi)\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times F_B\left(i_0\cos(\xi-\Theta)\right)d\xi\right\}d\eta,$$

где a – коэффициент несимметрии ротора.

Проведя преобразования, получим

$$\psi_c(\Theta,\Theta_\psi) = \frac{2L_m I_{он}}{\pi(1+a)}\left\{\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(\eta)F_B\left(i_0\cos(\eta)\right)d\eta + \right.$$

$$+\frac{\alpha}{2}\cos\left(2(\theta-\theta_\phi)\right)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(3\eta)F_B\left(i_0\cos(\eta)\right)d\eta\Big\}e^{j\theta}.$$

Отметим весьма важную особенность полученного результата - в условиях установившихся режимов $\cos\left(2(\theta-\theta_\phi)\right)=const$, так как углы θ и θ_ϕ изменяются синхронно: $\theta=\omega t+\theta$, $\theta_\phi=\omega t$ и, следовательно, их разность $\theta-\theta_\phi=\theta_0$; в переходных процессах угловые скорости обобщенных векторов ψ_0, ψ_R могут быть различными, и тогда возникают биения электромагнитных переменных, что приводит к качаниям машины.

В заключение рассмотрим возможность отказа от требования синусоидальности распределения напряженности магнитного поля в зазоре. Отметим, что в модели потокосцепление секции является интегралом распределения магнитного поля в зазоре по поверхности, причем преобразование напряженности магнитного поля локально, что ранее для симметричного, распределенного и синусоидального распределения устанавливалось аргументом функции $F_B(\cdot)$ в виде $\cos(\eta)$, для произвольного распределения, очевидно, необходима простая модификация аргумента функции $F_B(\cdot)$ в виде $W_K(\theta,\theta_\phi,\eta)$, где θ, θ_ϕ - углы, учитывающие положение распределения напряженности магнитного поля в зазоре относительно секций обмоток статора и ротора, в остальном обобщенный вектор главного потокосцепления ψ_0 вычисляется по формуле (4) или для конкретной машины по формуле (6).

Таким образом, получена математическая модель машины переменного тока (10), позволяющая исследовать как установившиеся, так и переходные процессы, учитывая магнитное насыщение и конструктивные особенности сосредоточенных обмоток и магнитных несимметрий машины.