Записки Санкт-Петербургского горного института имени Г.В.Плеханова.
Т.130. СПб, 1992

550.831.01

Г.Г.КРАВЦОВ

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД В ЗАДАЧАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ АНОМАЛИЙ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Линейное программирование давно и успешно применяют в геофизике для ления линеаризированной задачи подбора параметров модели геологической ды по магнитным и гравитационным аномалиям. Но, в отличие от традицион- для линейного программирования задач экономики и планирования, при номерном приближении функций, к которому сводится задача подбора, появ- тся своя специфика, которую, как показал наш опыт, обязательно надо итывать. Суть ее заключается в том, что при аппроксимации исходной ано- ии $\Delta g(x_i, y_i, z_i) = \Delta g_i \quad (i = \overline{1,s})$, подбираемой функцией

$$\Phi(x_i, y_i, z_i) = \Phi_i = \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij}\sigma_j + a'_i,$$

ходится, как правило, иметь дело с двусторонними ограничениями и на дбираемую функцию, и на искомые параметры этой функции[x]:

$$\left|\Phi_i - \Delta g_i\right| \le \nu_i k \quad (i = \overline{1,s}); \tag{1}$$

$$\sigma_{нj} \le \sigma_j \le \sigma_{вj} \quad (j = \overline{1,n_1}); \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} e_{pj}\sigma_j = d_p \quad (p = \overline{1,n_3};\ n_3 \le n_1); \tag{3}$$

$$a'_{нt} \le a'_t \le a'_{вt} \quad (t = \overline{1,n_4}), \tag{4}$$

де a_{ij} – притяжение j-го элемента физической модели геологической сре- ы в точке дневной поверхности (x_i, y_i, z_i) при единичной избыточной плот- ости; n_1 – общее число элементов модели; σ_j – определяемая избыточная отность j-го элемента модели; $a'_i = ax_i + by_i + c$ – подбираемый гра- итационный эффект от удаленных геологических объектов, рассматриваемый качестве линейного условного уровня поля Δg_i; a, b и c – определяе- ые коэффициенты линейной функции a'_i; $\sigma_{нj}$, $\sigma_{вj}$ и $a'_{нt}$, $a'_{вt}$ – соот- ветственно нижние и верхние границы возможных значений определяемых пара- етров σ_j и фоновой функции a'_i; e_{pj} и d_p – коэффициенты ограничений-

[x] Кравцов Г.Г., Сегалович В.И. Методика подбора геолого-структурных моделей о заданному полю силы тяжести с помощью укрупненных многогранных элементов // Записки ленинградского горного ин-та, 1976. Т.68. Вып.2. С.88-91.

равенств, устанавливающих определенные соотношения между подбираемыми параметрами σ_j.

Значения $\sigma_{нj}$, $\sigma_{вj}$, $a'_{нt}$, $a'_{вt}$, c_{oj}, d_p, как и геометрия среды, на основании которой вычисляется путем решения прямой задачи матрица коэффициентов a_{ij}

$$G=(a_{ij})_{i=1,\,j=1}^{s,\,n_1}, \qquad (5)$$

задаются заранее на основе геолого-геофизических сведений.

С учетом взаимно увязанных пар двусторонних ограничений (I), (2), (4) и наличия ограничений-равенств (3), а также принимая во внимание ряд других соображений, вытекающих из геометрической трактовки и алгебраических свойств рассматриваемой задачи линейного программирования, была предложена наиболее экономичная с точки зрения объема и трудоемкости вычислений и устойчивая к неизбежным погрешностям вычислений схема проверки всей совокупности неравенств решаемой задачи и управления прохождением итерационного процесса в алгоритме модифицированного двойственного симплекс-метода.

Неравенствам (I) равносильна следующая система неравенств:

$$\Phi_i - \nu_i k \le \Delta g_i; \quad -\Phi_i - \nu_i k \le \Delta g_i \quad (i=\overline{1,s}). \qquad (6)$$

Наша задача заключается в получении решения, минимизирующего переменный параметр k. Для единообразия вычислительной схемы наложим и на него двусторонние ограничения

$$k_н \le k \le k_в. \qquad (7)$$

Исходя из характера решаемой задачи, нижний предел $k_н$ естественно положить равным нулю. Верхний же предел $k_в$ полезно задать некоторым достаточно большим положительным числом, чтобы обеспечивалось прерывание итерационного процесса подбора, коль скоро допущенная ошибка при подготовке исходных данных приведет к ничем не оправданному значительному увеличению минимизируемого параметра k.

Параметры $\nu_i > 0$ ($i = \overline{1,s}$) также входят в число исходных данных. Ими регулируется ширина коридора невязок аппроксимации, чтобы обеспечить сглаживание подбираемой функции. При строго равномерном приближении функций параметры $\nu_i = 1$ $(i=\overline{1,s})$.

Воспользуемся матричной алгеброй, чтобы упростить запись неравенств. Введем в рассмотрение n-мерный вектор-столбец неизвестных параметров ($n = n_1 + 4$)

$$\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)^T = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n_1}, a, b, c, k)^T$$

и n-мерные векторы-строки, чьи компоненты заданы следующим образом: $\bar{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$.

Упорядочим нумерацию неравенств (6) в соответствии с обозначениями

$$\left.\begin{aligned}\bar{\alpha}_{2i-1}&=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in_1},\ x_i,y_i,1,-v_i);\ b_{2i-1}=\Delta g_i\\ \bar{\alpha}_{2i}&=(-a_{i1},-a_{i2},\dots,-a_{in_1},-x_i,-y_i,-1,-v_i);\ b_{2i}=-\Delta g_i\end{aligned}\right\},\quad i=\overline{1,s}.$$

Имея в виду правила умножения матриц, запишем неравенства (6) в векторной форме:

$$\bar{\alpha}_i\bar{\eta}\le b_i\quad(i=\overline{1,2s}).\tag{8}$$

Аналогично приведем к виду (8) ограничения (2)-(4), (7). Тогда

$$\bar{\alpha}_i\bar{\eta}\le b_i\quad(i=\overline{2s+1,\ 2q});\tag{9}$$

$$\bar{\alpha}_i\bar{\eta}=b_i\quad(i=\overline{2q+1,\ 2q+2n_3}),\tag{10}$$

где

$$q=s+n_1+n_4+1:\quad \bar{\alpha}_{2i-1}=-\bar{\alpha}_{2i}\quad(i=\overline{s+1;\ q+n_3});$$

$$\left.\begin{aligned}b_{2i-1}&=\sigma_{вj}\\ b_{2i}&=-\sigma_{нj}\end{aligned}\right\},\ i=s+j,\ j=\overline{1,n_1};\qquad \left.\begin{aligned}b_{2i-1}&=a'_{вt}\\ b_{2i}&=-a'_{нt}\end{aligned}\right\},\quad i=s+n_1+t,\ t=\overline{1,n_4};$$

$$\left.\begin{aligned}b_{2i-1}&=k_в\\ b_{2i}&=-k_н\end{aligned}\right\},\ i=q;\qquad \left.\begin{aligned}b_{2i-1}&=d_p\\ b_{2i}&=-d_p\end{aligned}\right\},\quad i=q+p,\ p=\overline{1,n_3}.$$

Векторы $\bar{\alpha}_i$, соответствующие неравенствам (2), имеют только один компонент, отличный от нуля. Для векторов с нечетным индексом этот компонент равен единице. Так что матрица, составленная из них, будет единичной матрицей E.

У векторов $\bar{\alpha}_i$, относящихся к неравенствам (4), первые n_1 компонентов и последний компонент равны нулю. Оставшиеся три компонента у векторов с нечетным индексом соответственно в порядке следования равны x'_t, y'_t, I, где x'_t, y'_t ($t=\overline{1,n_4}$) – координаты точек дневной поверхности, в которых заданы ограничения на фон.

У векторов $\bar{\alpha}_i$, отвечающих неравенствам (7), все компоненты, кроме последнего, равны нулю, а последний компонент у вектора с нечетным индексом равен единице.

У векторов $\bar{\alpha}_i$ равенств (10) место последних четырех компонентов занимают нули. Первые же n_1 компонентов для векторов с нечетным индексом совпадают с коэффициентами при c_j под знаком суммы (3).

Задача оптимизации, в которой целевая функция представлена линейной комбинацией переменных параметров

$$\phi=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{0j}\eta_j=\bar{\alpha}_0\bar{\eta},\tag{11}$$

а ограничения – неравенствами и уравнениями (8)-(10), решается методами линейного программирования. Соответствующая задача линейного программирования со смешанными ограничениями в произвольной форме записи формулируется

так: найти минимум (максимум) линейной формы $\phi = \bar{\alpha}_0 \bar{\eta}$ при наличии ограничений

$$\bar{\alpha}_i \bar{\eta} \leq b_i \quad (i = \overline{1, 2q}); \quad \bar{\alpha}_i \bar{\eta} = b_i \quad (i = \overline{2q+1;\ 2q+2n_3}). \qquad (12)$$

Коэффициенты α_{0j} и тип экстремума целевой функции ϕ выбирают, исходя из существа решаемой задачи. В случае приближения функций ищут минимум линейной формы $\phi = \bar{\alpha}_0 \bar{\eta} = k$, для чего компоненты вектора $\bar{\alpha}_0$ полагают соответственно $\alpha_{0j} = 0$ $(j = \overline{1, n-1})$, $\alpha_{0n} = 1$.

Алгебраические методы решения задач линейного программирования основаны на поиске одного из возможных решений неопределенной системы уравнений. Поэтому все ограничения задачи должны быть записаны в виде равенств. От неравенства, добавляя к нему подходящую свободную переменную $z_i \geq 0$, всегда можно перейти к равенству. С помощью неотрицательных свободных переменных сформулируем задачу линейного программирования в канонической форме записи: найти минимум (максимум) линейной формы $\phi = \bar{\alpha}_0 \bar{\eta}$ при наличии ограничений

$$z_i + \bar{\alpha}_i \bar{\eta} = b_i \quad (i = \overline{1, 2q+2n_3}); \qquad (13)$$

$$z_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, 2q+2n_3}). \qquad (14)$$

Решение задачи линейного программирования находят с помощью так называемой симплексной таблицы, составленной из коэффициентов линейной формы и ограничений. Таблица подвергается многократным преобразованиям по специальным правилам вплоть до получения ответа или установления несовместности рассматриваемой системы неравенств. При этом количество арифметических операций, затрачиваемое на решение той или иной задачи, существенно зависит от размера симплексной таблицы, равного $(2q + 2n_3 + 1)(n + 1)$. Одно из преимуществ модифицированного двойственного симплекс-метода состоит в том, что в нем используется сокращенная симплексная таблица размером $(n + 1)^2$, чем значительно повышается его быстродействие.

При составлении исходной сокращенной симплексной таблицы используем ограничения $\sigma_j \geq \sigma_{нj}$ $(j = \overline{1, n_1})$, $k \geq k_н$, извлеченные из двусторонних неравенств (2) и (7), а также вспомогательные ограничения на коэффициенты функций α'_i:

$$a \geq \gamma; \quad b \geq \gamma; \quad c \geq \gamma, \qquad (15)$$

устанавливающие условную нижнюю границу значений параметров a, b и c. В качестве γ можно выбрать достаточно большое по модулю отрицательное число. Неравенства (15) обычным путем приводятся к виду $\bar{\alpha}_i \bar{\eta} \leq b_i$, где $b_i = -\gamma$, а у вектора $\bar{\alpha}_i$ все компоненты – нулю, кроме одного, который равен минус единице. С помощью свободных переменных $z_i \geq 0$ от неравенств переходим затем к равенствам $z_i + \bar{\alpha}_i \bar{\eta} = b_i$. В процессе решения задачи вспомогательные ограничения (15) не проверяются. Их векторы $\bar{\alpha}_i$, выйдя из симплексной таблицы, попросту теряются. Для коэффициентов a, b и c, принадлежащих функции a'_i, предусмотрены более содержательные ограничения (4).

Попутно отметим, что если бы параметры σ_j ($j = \overline{1, n_1}$) и k не бы-
ы ограничены снизу неравенствами (2) и (7), то для них тоже потребо-
сь бы ввести вспомогательные ограничения по типу (I5). Предлагаемый
ритм носит универсальный характер и может применяться и тогда, когда
ь или все ограничения из группы (2)–(4) и (7) отсутствуют.

Все векторы $\bar{\alpha}_i$, намеченные для включения в исходную симплексную таб-
, которую пометим как таблицу τ, соберем в квадратную матрицу

$$D_\tau = \left(\alpha_{ij}^{(\tau)}\right)_{i=1,\,j=1}^{n,\,n} = \left(\bar{\alpha}_1^{(\tau)},\ \bar{\alpha}_2^{(\tau)},\ \ldots,\ \bar{\alpha}_n^{(\tau)}\right)^T.$$

Из свободных переменных z_i и свободных членов b_i, индексы которых
падают с индексами векторов матрицы D_τ, образуем векторы-столбцы

$$\bar{Z}_\tau = \left(z_1^{(\tau)},\ z_2^{(\tau)},\ \ldots,\ z_n^{(\tau)}\right)^T;$$

$$\bar{b}_\tau = \left(b_1^{(\tau)}, b_2^{(\tau)}, \ldots, b_n^{(\tau)}\right)^T = \left(-\sigma_{н1}, -\sigma_{н2}, \ldots, -\sigma_{нn_1}, -\gamma, -\gamma, -\gamma, -k_н\right)^T.$$

Матрица D_τ и векторы $\bar{Z}_\tau$, $\bar{b}_\tau$ связаны между собой матричным равен-
зом

$$\bar{Z}_\tau + D_\tau \bar{\eta} = \bar{b}_\tau . \qquad (I6)$$

свойству вошедших в матрицу векторов $\bar{\alpha}_i^{(\tau)}$ имеем $D_\tau = (-1)^r E$, где Γ –
иничная матрица. Разрешим равенство (I6) относительно вектора $\bar{\eta}$ домно-
нием его слева на матрицу $D_\tau^{-1} = (-1)^r E$, обратную матрице D_τ:

$$\bar{\eta} = \bar{\beta}_\tau + D_\tau^{-1}(-\bar{Z}_\tau), \qquad (I7)$$

ie

$$\bar{\beta}_\tau = D_\tau^{-1}\bar{b}_\tau = \left(\beta_{10}^{(\tau)},\ \beta_{20}^{(\tau)},\ \ldots,\ \beta_{n0}^{(\tau)}\right)^T. \qquad (I8)$$

одставляя в выражение (II) вместо вектора $\bar{\eta}$ праву часть равенства (I7),
айдем функциональную зависимость линейной формы от величины свободных
еременных $z_i^{(\tau)}$ вектора-столбца $\bar{Z}_\tau$:

$$\phi = \beta_{00}^{(\tau)} + \bar{\beta}_{0\tau}(\bar{Z}_\tau), \qquad (I9)$$

:де

$$\beta_{00}^{(\tau)} = \bar{\alpha}_0 \bar{\beta}_\tau ; \qquad (20)$$

$$\bar{\beta}_{0\tau} = \bar{\alpha}_0 D_\tau^{-1} = \left(\beta_{01}^{(\tau)},\ \beta_{02}^{(\tau)},\ \ldots,\ \beta_{0n}^{(\tau)}\right). \qquad (2I)$$

В первую симплексную таблицу ($\tau = I$) вносятся элемент $\beta_{00}^{(\tau)}$, компо-
ненты вектора $\bar{\beta}_\tau$ и $\bar{\beta}_{0\tau}$, а также элементы матрицы D_τ^{-1}. Индексы свобод-
ных переменных $z_i^{(\tau)}$ вектора-столбца $\bar{Z}_\tau$ тоже полезно сохранить. С их
помощью можно организовать обход вычисления тех свободных переменных,

которые не нуждаются в проверке на знак минус на данной итерации τ. Ниже приводится общий вид симплексной таблицы (табл.1) и исходная симплексная таблица (табл.2), где умножение вектора-строки $\bar{\beta}_{0\tau}$ и обратной матрицы D_τ^{-1} на вектор-столбец $-\bar{Z}_\tau$ символически показано размещением свободных переменных $-z_i^{(\tau)}$ над соответствующими столбцами таблицы.

Векторы $\bar{\alpha}_i^{(\tau)}$, вошедшие в матрицу D_τ, играют в пространстве R^n роль системы координат и образуют базис этого пространства. Ввиду специфики выбранных векторов работа по предлагаемому алгоритму начинается с образования так называемого канонического базиса.

При очередной итерации двойственного симплекс-метода сначала ищут добавочные переменные z_i, не удовлетворяющие условию (I4). Для этого надо выяснять, найдутся ли среди них отрицательные. Приравняв в выражении (I7) вектор-столбец $\bar{Z}_\tau$ нулевому вектору, найдем компоненты вектора $\bar{\eta}$ на текущей итерации τ: $\bar{\eta} = \bar{\beta}_\tau$. И далее, воспользовавшись равенствами (I3), свободные переменные надо просто вычислить:

$$z_i = b_i - \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_\tau \qquad (i = \overline{1, 2q + 2r_3}). \tag{22}$$

Проверку свободных переменных можно организовать и более рационально, если обратить внимание на свойства ограничений (8)-(I0). Складывая попарно следующие друг за другом равенства (I3) соответственно с нечетным и четным индексом, получим

$$z_{2i-1} + z_{2i} = 2\nu_i k \geq 0 \qquad (i = \overline{1, s}); \tag{23}$$

$$z_{2i-1} + z_{2i} = \sigma_{вj} - \sigma_{нj} \geq 0 \qquad (i = s + j;\ j = \overline{1, n_1}); \tag{24}$$

$$z_{2i-1} + z_{2i} = a'_{вt} - a'_{нt} \geq 0 \qquad (i = s + n_1 + t;\ t = \overline{1, n_4}); \tag{25}$$

$$z_{2i-1} + z_{2i} = k_в - k_н > 0 \qquad (i = q); \tag{26}$$

$$z_{2i-1} + z_{2i} = 0 \qquad (i = q + p;\ p = \overline{1, n_3}). \tag{27}$$

Из соотношений (23)-(27) вытекают следующие следствия:

I. Из двух свободных переменных каждой пары отрицательной может быть только одна и то лишь тогда, когда парная ей переменная больше нуля. Следовательно, из проверки надо исключить полностью все те пары, чьи представители присутствуют в векторе-столбце $\bar{Z}_\tau$. Изъятие из проверки базисных и сопутствующих им свободных переменных благоприятствует устойчивости алгоритма к неизбежным погрешностям вычислений.

2. По формуле (22) достаточно вычислить только одну из свободных переменных, например с нечетным индексом, а парную ей переменную найти с помощью менее трудоемких выражений (23)-(27). Кроме того, формулу (22) целесообразно использовать не в общем виде, а применительно к структуре

Таблица 1

Общий вид симплексной таблицы

τ		$-z_1^{(\tau)}$	$-z_2^{(\tau)}$	...	$-z_n^{(\tau)}$
$\bar{\eta}$ \ ϕ	$\beta_{0,0}^{(\tau)}$	$\beta_{0,1}^{(\tau)}$	$\beta_{0,2}^{(\tau)}$	...	$\beta_{0,n}^{(\tau)}$
σ_1	$\beta_{1,0}^{(\tau)}$	$\beta_{1,1}^{(\tau)}$	$\beta_{1,2}^{(\tau)}$	...	$\beta_{1,n}^{(\tau)}$
σ_2	$\beta_{2,0}^{(\tau)}$	$\beta_{2,1}^{(\tau)}$	$\beta_{2,2}^{(\tau)}$	...	$\beta_{2,n}^{(\tau)}$
...	...	...	...	...	...
σ_{n_1}	$\beta_{n_1,0}^{(\tau)}$	$\beta_{n_1,1}^{(\tau)}$	$\beta_{n_1,2}^{(\tau)}$	...	$\beta_{n_1,n}^{(\tau)}$
a	$\beta_{n_1+1,0}^{(\tau)}$	$\beta_{n_1+1,1}^{(\tau)}$	$\beta_{n_1+1,2}^{(\tau)}$	...	$\beta_{n_1+1,n}^{(\tau)}$
b	$\beta_{n_1+2,0}^{(\tau)}$	$\beta_{n_1+2,1}^{(\tau)}$	$\beta_{n_1+2,2}^{(\tau)}$	...	$\beta_{n_1+2,n}^{(\tau)}$
c	$\beta_{n_1+3,0}^{(\tau)}$	$\beta_{n_1+3,1}^{(\tau)}$	$\beta_{n_1+3,2}^{(\tau)}$	...	$\beta_{n_1+3,n}^{(\tau)}$
k	$\beta_{n,0}^{(\tau)}$	$\beta_{n,1}^{(\tau)}$	$\beta_{n,2}^{(\tau)}$	...	$\beta_{n,n}^{(\tau)}$

Таблица 2

Исходная симплексная таблица

$\tau = 1$		$-z_1^{(\tau)}$	$-z_2^{(\tau)}$	...	$-z_n^{(\tau)}$
$\bar{\eta}$ \ ψ	$k_н$	0	0	...	-1
σ_1	$\sigma_{н1}$	-1	0	...	0
σ_2	$\sigma_{н2}$	0	-1	...	0
...	...	...	...	...	...
σ_{n_1}	$\sigma_{нn_1}$	0	0	...	0
a	γ	0	0	...	0
b	γ	0	0	...	0
c	γ	0	0	...	0
k	$k_н$	0	0	...	-1

векторов $\bar{\alpha}_{2i-1}$. Ведь у ряда векторов, как отмечалось выше, многие компоненты попросту равны нулю, а некоторые из неравных нулю компонентов равны единице.

Эти особенности проверки свободных переменных дают зримую экономию машинного времени особенно в многопараметрических задачах с большим числом ограничений.

При проверке свободных переменных могу возникнуть два альтернативных положения. В одном из них все свободные переменные оказываются неотрицательными. Это означает, что ограничения (I3) и (I4) полностью удовлетворены и решение задачи найдено. Действительно, при заданном базисе D_τ величина линейной формы ϕ зависит только от базисных переменных $z_i^{(\tau)}$ [см. формулу (I9)]. При положительных значениях переменных $z_i^{(\tau)}$ линейная форма может лишь возрасти, так как вектор $\bar{\rho}_{0\tau}$ не имеет положительных компонент (см. табл.2). Отметим попутно, что условие $\rho_{0j}^{(\tau)} \le 0$ ($j = \overline{1,n}$) при поиске минимума целевой функции или $\rho_{0j}^{(\tau)} \ge 0$ ($j = \overline{1,n}$) при поиске максимума целевой функции называется в линейном программировании критерием оптимальности.

В другом положении среди свободных переменных встретится хотя бы одна отрицательная. Любую из них можно использовать для перехода к новому базису, чтобы приблизиться к искомому минимуму целевой функции ϕ. Обычно среди отрицательных переменных выбирают ту, которая является в некотором смысле наиболее неудовлетворенной:

$$-z_l = \max_{z_i<0} |z_i| \qquad (i = \overline{1, 2q+n_3}). \tag{28}$$

Чтобы перейти от старого базиса D_τ к новому $D_{\tau+1}$, отличающемуся от старого только одним вектором $\bar{\alpha}_l$ [индекс l найдем по правилу (28)], надо вначале установить, какой вектор из старого базиса можно вывести, не нарушив при этом критерия оптимальности. Эту процедуру в линейном программировании принято называть поиском ведущего столбца, а процедуру (28) – поиском ведущей строки. Для этого необходимо найти разложение вектора $\bar{\alpha}_l$ по базису D_τ:

$$\bar{r}_l = (r_{l1}, r_{l2}, \ldots, r_{ln}) = \bar{\alpha}_l \cdot D_\tau^{-1},$$

и для положительных компонентов вектора $\bar{r}_l$ составить отношения $|\rho_{0j}^{(\tau)}|/r_{lj}$. Индекс m удаляемого из старого базиса вектора $\bar{\alpha}_m^{(\tau)}$ совпадает с индексом j наименьшего из этих отношений:

$$-\rho_{0m}^{(\tau)}/r_{lm} = \min_{r_{lj}>0} |\rho_{0j}^{(\tau)}|/r_{lj} \qquad (j=\overline{1,n}). \tag{29}$$

При поиске минимума может возникнуть неопределенность выбора индекса m, если несколько элементов $\rho_{0j}^{(\tau)}$ в строке ϕ симплексной таблицы будут нулями. С подобной ситуацией приходится сталкиваться уже в исходной симплексной таблице (см. табл.2). В этом случае в качестве ведущего столбца следует выбрать тот, для которого достигается

$$r_{lm} = \max_{j \in T} r_{lj}, \qquad (30)$$

де T – множество индексов j, удовлетворяющих условию (29).

Нами было доказано, что выбор (30) обеспечивает переход к такому ному базису $D_{\tau+1}$, для которого определитель матрицы $D_{\tau+1}$ будет наольшей по модулю величиной. Тем самым и обратная матрица $D_{\tau+1}^{-1}$ будет ычислена с минимально возможной погрешностью. Как показала практическая роверка алгоритма, использование правила (30) обеспечивает уменьшение исла итераций при решении практических задач.

При поиске так называемого разрешающего элемента r_{lm} не исключается случай, когда среди компонентов вектора $\bar{r}_l$ не найдется ни одного положительного компонента. Последнее свидетельствует, что рассматриваемая система ограничений (I2) противоречива и решения для нее попросту не существует.

Завершается рядовая итерация двойственного симплекс-метода образованием вспомогательного вектора

$$\bar{r}'_l = (r'_{l1} \; r'_{l2} \; \ldots \; r'_{ln}) = (r_{l1}, \ldots, r_{lm-1}, \; r_{lm} - 1, \; r_{lm+1}, \ldots, r_{ln}) / r_{lm}$$

и вычислением элементов новой симплексной таблицы $\tau + 1$ (кроме ее нулевого столбца) по формуле

$$\beta_{ij}^{(\tau+1)} = \beta_{ij}^{(\tau)} - \beta_{im}^{(\tau)} \cdot r'_{lj} \quad (i = \overline{0,n}; \; j = \overline{1,n}).$$

Затем в векторе-столбце $\bar{b}_\tau$ компонент $b_m^{(\tau)}$ заменяется свободным членом b_l ограничения (I3) с индексом l. Подстановкой нового вектора $\bar{b}_{\tau+1}$ и матрицы $D_{\tau+1}^{-1}$ из симплексной таблицы $\tau + 1$ в формулу (I8) вычисляется вектор-столбец $\bar{\beta}_{\tau+1}$, который и заносится в симплексную таблицу $\tau + 1$. Элемент $\beta_{00}^{(\tau+1)}$ новой симплексной таблицы вычисляется по формуле (20): $\beta_{00}^{(\tau+1)} = \bar{\alpha}_0 \cdot \bar{\beta}_{\tau+1}$. Новый вектор-столбец $\bar{Z}_{\tau+1}$ формируется замещением свободной переменной $z_m^{(\tau)}$ вводимой в базис свободной переменной $z_l = z_m^{(\tau+1)}$.

Предлагаемый алгоритм модифицированного двойственного симплекс-метода прошел основательную проверку. В I972 г. была написана программа на ЭВМ Минск-22 и на этой машине, а также на ЭВМ Минск-32 она успешно эксплуатировалась в производственных условиях более I0 лет. После смены парка ЭВМ программа в I982 г. была пересоставлена в ВЦ ПГО «Севзапгеология" на ЕС ЭВМ и включена в автоматизированную систему АСОИ ГЕОЛОГИЯ.