Записки Санкт-Петербургского горного института имени Г.В.Плеханова.
Т.130. СПб, 1992

УДК 550.831.01

С.В.ЗАХАРОВ

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПО ГРАВИТАЦИОННОМУ ПОЛЮ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ РАЗВЕДОЧНОЙ ГЕОФИЗИКИ

На различных этапах и стадиях геолого-разведочных работ на нефть и газ широкое применение находят гравитационные съемки. В соответствии со стадиями геолого-разведочных работ их результаты могут быть применены для решения различных задач.

Проводимые на стадии прогноза нефтегазоносности гравиметрические съемки масштабов I:100000-I:200000 направлены, в первую очередь, на решение задач выделения литолого-стратиграфических комплексов, структур их этажей, тектонического районирования территории [4]. Наиболее типичная для гравиразведки задача на этой стадии - картирование кровли фундамента. Кроме того, гравиразведкой может решаться и задача расчленения осадочного чехла в тех районах, где в пределах верхнего структурного этажа встречаются терригенные отложения.

Для решения таких задач допустимо применение простых физико-геологических моделей, что связано с сравнительно мелким масштабом съемок и их невысокой точностью. Зачастую в качестве такой модели может быть использована модель одной контактной поверхности (изучение кровли фундамента, картирование подошвы терригенных отложений и т.д.).

Задача восстановления по гравитационному полю границы раздела физических свойств традиционно решается путем минимизации среднеквадратического отклонения аномального и теоретического полей, т.е. вместо задачи $Fx = 0$ решается эквивалентная ей задача $\|Fx\|^2_{L_2} = min$, где F - некоторый нелинейный оператор. Однако, как показывает опыт линейной алгебры, задачи минимизации подобных функционалов оказываются более неустойчивыми, чем задачи решения исходных уравнений. Поэтому при решении линейных задач возник целый ряд методов получения устойчивых решений (в смысле наименьших квадратов) исходных уравнений. Это, в первую очередь, такие методы, как сингулярное разложение, преобразования Хаусхолдера и т.д. [6].

В статье рассмотрены алгоритмы решения задачи для контактной поверхности, также оперирующие с исходными уравнениями и допускающие их эффективную регуляризацию. При этом будет использоваться прямоугольная система координат с осью Ox, направленной вправо, и осью Oz, направленной вниз.

Двухмерная задача. Пусть на горизонтальной поверхности $z = 0$ задано гравитационное поле $\Delta g(x)$, создаваемое контактной

поверхностью со скачком плотности на границе раздела, выходящей слева и справа на асимптоту $z = H$. Запишем уравнение границы раздела в виде $z = z(\xi)$ и введем обозначение $\Delta z(\xi) = H - z(\xi)$.

В этом случае задача восстановления границы раздела сводится к решению относительно $\Delta z(\xi)$ следующего нелинейного интегрального уравнения I рода

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(x-\xi)^2+H^2}{(x-\xi)^2+(H-\Delta z(\xi))^2}\, d\xi = \frac{\Delta g(x)}{2\pi k\sigma}, \qquad (I)$$

где k – гравитационная постоянная.

Перепишем уравнение (I, в операторном виде

$$F(y) = 0, \qquad (2)$$

(здесь F – нелинейный оператор прямого отображения из одного гильбертова пространства Y_1 в другое Y_2) и применим для его решения, как, например, предложено в работе [8], итерационный процесс метода Ньютона – Канторовича [3, 7]

$$y_{n+1} = y_n + h_n, \qquad (3)$$

где h_n находится как решение линейного операторного уравнения I рода

$$F'(y_n)h_n = -F(y_n). \qquad (4)$$

Здесь $F'(y_n)$ – производная Фреше оператора F в точке y_n.

Для уравнения (I) формулы (3) и (4) могут быть записаны в виде

$$\Delta z_{n+1}(\xi) = \Delta z_n(\xi) + h_n(\xi); \qquad (5)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_n(\xi)h_n(\xi)}{(x-\xi)^2+z_n^2(\xi)}\, d\xi = \frac{\Delta g(x)}{2\pi k\sigma} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(x-\xi)^2+H^2}{(x-\xi)^2+z_n^2(\xi)}. \qquad (6)$$

Задача, поставленная уравнениями (I) или (6), является типичной некорректно поставленной задачей. Поэтому для ее решения необходимо привлекать специальные методы регуляризации [2, 9, I0]. Однако, как легко заметить, линейный интегральный оператор в формуле (6) не является в общем случае положительно определенным, а оператор F – соответственно монотонным. Последнее не позволяет применить для решения уравнения (I) экономичные алгоритмы типа алгоритма регуляризации М.М.Лаврентьева, обобщенные на случай нелинейных уравнений с монотонными операторами [I]. Применение же для решения уравнения методов регуляризации А.Н.Тихонова приводит к значительно более обусловленным уравнениям. В данной ситуации целесообразно поступить следующим образом.

Подействуем на левую и правую части в уравнении (4) некоторым невырожденным линейным оператором $G(y_n)$. В этом случае уравнение (4) преобразуется в эквивалентное ему уравнение [5]

$$G(y_n)F'(y_n)h_n = -G(y_n)F(y_n) \quad \text{при} \quad Im(F') \subset R(G), \tag{7}$$

где $R(\cdot)$ и $Im(\cdot)$ - область определения и область значений оператора соответственно. Если, кроме того, выбрать оператор $G(y_n)$ так, чтобы оператор $G(y_n)F'(y_n)$ являлся положительно определенным, то уравнение (7) может быть регуляризировано по М.М.Лаврентьеву. Естественно, обусловленность оператора $G(y_n)F'(y_n)$ должна быть меньше, чем оператора $F'^{*}(y_n)F'(y_n)$.

Для рассматриваемой задачи в качестве такого оператора может быть взят оператор С.Пуассона

$$Gf = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\Delta h + h_n - \Delta z_n(t))f(\tau)}{(t-\tau)^2 + (\Delta h + h_n - \Delta z_n(t))^2}\, d\tau, \tag{8}$$

где Δh - некоторая положительная константа; $h_n = \max_{\xi}(\Delta z_n(\xi))$, $\lim_{|t|\to\infty} |tf(t)| < \infty$, $f \in L_2[-\infty;\infty]$.

В этом случае уравнение (6) с учетом формул (7) и (8) преобразуется в эквивалентное ему уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\Delta h + h_n + H - (\Delta z_n(t) + \Delta z_n(\tau)))h_n(\tau)}{(\tau - t)^2 + (\Delta h + h_n + H - (\Delta z_n(t) + \Delta z_n(\tau)))^2}\, d\tau = \frac{1}{2\pi^2 k\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\Delta h + h_n - \Delta z_n(t))\Delta g(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^2 + (\Delta h + h_n - \Delta z_n(t))^2} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(t-\tau)^2 + (\Delta h + h_n - \Delta z_n(t) + H)^2\, d\tau}{(t-\tau)^2 + (\Delta h + h_n + H - (\Delta z_n(t) + \Delta z_n(\tau)))^2}. \tag{9}$$

Непосредственно из этой формулы следует, что уравнение (9) есть уравнение с некоторым самосопряженным оператором A. Чтобы доказать его положительность, покажем, что его можно представить в виде произведения

$$A = B^{*}B, \tag{10}$$

где B - некоторый невырожденный линейный интегральный оператор.

Рассмотрим оператор B, описываемый интегральным представлением

$$B\mu = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(0{,}5(\Delta h + h_n + H) - \Delta z_n(\tau))\mu(\tau)}{(t-\tau)^2 + (0{,}5(\Delta h + h_n + H) - \Delta z_n(\tau))^2}\, d\tau. \tag{11}$$

Непосредственным вычислением (например, с помощью теорем о вычетах) легко показать справедливость формулы

$$B^{*}B\mu = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\Delta h + h_n + H - (\Delta z_n(t) + \Delta z_n(\tau)))\mu(\tau)}{(t-\tau)^2 + (\Delta h + h_n + H - (\Delta z_n(t) + \Delta z_n(\tau)))^2}\, d\tau. \tag{12}$$

Отметим, что формулу (12) можно получить и без применения аналитических выкладок, исходя из того, что оператор B^{*} по существу есть оператор С.Пуассона аналитического продолжения вверх.

Формула (12) показывает справедливость представления (10) для оператора A, описываемого уравнением (9), что и доказывает положительность оператора A [3]. Поэтому, используя идею метода регуляризации М.М.Лаврентьева [9], уравнение (9), предварительно заменив бесконечные пределы интегрирования конечными, можно привести к виду

$$\frac{1}{\pi}\int_b^a \frac{z_n(t,\tau)h_n(\tau)}{(t-\tau)^2+z_n^2(t,\tau)}d\tau+\frac{\alpha h_n(\tau)}{\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2-\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2}}=\frac{1}{2\pi^2 k\sigma}\int_b^a \frac{(z_n(t)-H)^2\Delta g(\tau)d\tau}{(t-\tau)^2+(z_n(t)-H)^2}-$$

$$-\int_b^a \ln\frac{(t-\tau)^2+z_n^2(t)}{(t-\tau)^2+z_n^2(t,z)}d\tau+\frac{\alpha h_n(\tau)}{\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2-\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2}}, \qquad (13)$$

где α – параметр регуляризации;

$$z_n(t,\tau)=\Delta h+h_n+H-\Delta z_n(t)-\Delta z_n(\tau); \qquad (14)$$

$$z_n(t)=\Delta h+h_n+H-\Delta z_n(t). \qquad (15)$$

Для решения уравнения (13) целесообразно воспользоваться стандартными схемами решения таких уравнений и выбора оптимального значения параметра регуляризации. В частности, после замены интегралов в (13) соответствующими интегральными суммами интегральное уравнение (13) сводится к системе линейных уравнений с самосопряженной положительно определенной матрицей. Эту систему уравнений можно решать методом сопряженных градиентов, который является численно устойчивым и обладает свойством саморегуляризации [9].

Трехмерная задача. В этом случае задача восстановления границы раздела плотности сводится к решению относительно $\Delta z(\xi,\eta)$ следующего аналога нелинейного интегрального уравнения (1):

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+[H-\Delta z(\xi,\eta)]^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+H^2}}\right)d\xi d\eta=\frac{\Delta g(x,y)}{4\pi k\sigma}, \qquad (16)$$

где $H-\Delta z(\xi,\eta)=z(\xi,\eta)$ – уравнение границы раздела $\rho^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$.

Применив итерационный процесс (3) метода Ньютона – Канторовича для решения уравнения (16), запишем аналоги формул (5), (6) в виде

$$\Delta z_{n+1}(\xi,\eta)=\Delta z_n(\xi,\eta)+h_n(\xi,\eta), \qquad (17)$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{z_n(\xi,\eta)h_n(\xi,\eta)}{\sqrt{\rho^2+z_n^2(\xi,\eta)^3}}d\xi d\eta=\frac{\Delta g(x,y)}{4\pi k\sigma}-\frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_n^2(\xi,\eta)}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+H^2}}\right)d\xi d\eta. \qquad (18)$$

Так как линейный интегральный оператор в формуле (18) не является положительным, что не позволяет применить для решения уравнения (18) экономичные регуляризирующие алгоритмы типа алгоритма регуляризации М.М.Лаврентьева, преобразуем это уравнение с помощью формулы (7), выбрав в качестве оператора G оператор С.Пуассона

$$Gf=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{(\Delta h+h_n-\Delta z_n(t,v))f(\tau,\nu)d\tau d\nu}{\sqrt{(t-\tau)^2+(v-\nu)^2+(\Delta h+h_n-\Delta z_n(t,v))^2}^3}, \qquad (19)$$

где Δh – некоторая положительная константа; $h_n=\max_{\xi,\eta}(\Delta z_n(\xi,\eta))$;

$\lim_{\tau^2+\nu^2\to\infty}\left|(\tau^2+\nu^2)f(\tau,\nu)\right|<\infty$; $f\in L_2[(-\infty;\infty);(-\infty;\infty)]$.

В этом случае уравнение (I8) с учетом формул (7) и (8) преобразуется в эквивалентное ему уравнение

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{z_n(t,v,\tau,\nu)h_n(\tau,\nu)}{\sqrt{\rho^2+z_n^2(t,v,\tau,\nu)}^3}d\tau d\nu=\frac{1}{8\pi^2 k\sigma}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{(\Delta h+h_n-\Delta z_n(t,v))\Delta g(\tau,\nu)}{\sqrt{\rho^2+(\Delta h+h_n-\Delta z_n(t,v))^2}^3}d\tau d\nu -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_n^2(t,v,\tau,\nu)}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z_n(t,v,\tau,\nu)-\Delta z_n(\tau,\nu))^2}}\right)d\tau d\nu, \qquad (20)$$

где $z_n(t,v,\tau,\nu)=\Delta h+h_n+H-\Delta z_n(t,v)-\Delta z_n(\tau,\nu)$; $\rho^2=(t-\tau)^2+(v-\nu)^2$.

Как и для уравнения (9), можно показать аналогично, что линейный самосопряженный оператор A, определяемый формулой (20), представим в виде (I0), если оператор B выбрать в виде

$$B\mu=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{(0{,}5(\Delta h+h_n+H)-\Delta z_n(\tau,\nu))\mu(\tau,\nu)}{\sqrt{\rho^2+(0{,}5(\Delta h+h_n+H)-\Delta z_n(\tau,\nu)^2}^3}d\tau d\nu. \qquad (21)$$

Справедливость равенства (I0) для формулы (20) легко проверяется непосредственным вычислением, что и доказывает положительность соответствующего оператора A, описываемого уравнением (20).

Заменив в (20) бесконечные пределы интегрирования конечными и проводя регуляризацию полученного уравнения аналогично тому, как это было сделано для уравнения (9), легко получить соответствующий аналог уравнения (I3).

Предложенные алгоритмы восстановления контактных поверхностей могут также быть использованы для решения задач локализации и разделения источников, а в некоторых случаях - и для решения задач прогноза нефтегазоносности.

Возможности указанного способа обработки для решения задач локализации изолированных источников гравитационного поля могут быть проиллюстрированы рис.I и 2. На рис.I изображены два эллипса с избыточной плотностью σ = 0,3 г/см^3 и показано рассчитанное от них гравитационное поле, имеющее только один максимум. По этому гравитационному полю были построены две контактные поверхности с избыточной плотностью 0,3 г/см^3 и асимптотами, расположенными на глубинах I900 и 2000 м, и одна контактная поверхность с избыточной плотностью σ = -0,05 г/см^3 и асимптотой на глубине I000 м. Рис.I хорошо иллюстрирует различные возможности метода построения контактной поверхности для решения задачи разделения

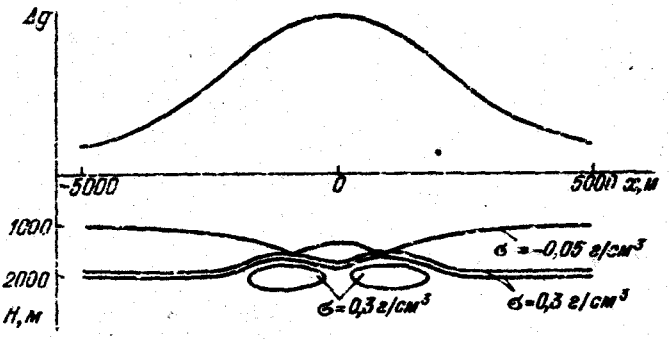


Рис.1. Пример локализации плотностных неоднородностей с использованием процедуры построения контактной поверхности

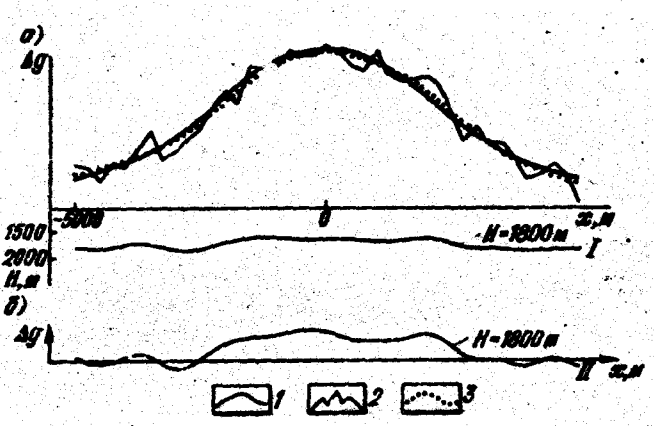


Рис.2. Сравнение разрешающей способности процедуры построения контактной поверхности (а) и процедуры аналитического продолжения (б)

I и II – соответственно подобранная граница раздела и аналитически продолженное поле на глубину 1800 м; 1, 2 и 3 – гравитационное поле, теоретическое, осложненное случайной помехой и рассчитанное для подобранной границы раздела соответственно

и локализации источников. Отметим, что по исходному гравитационному полю существование нескольких изолированных источников этого поля визуально установить невозможно.

Известно, что для решения таких задач традиционно применяются различные способы аналитического продолжения поля к массам. Определенные преимущества рассматриваемого способа локализации перед способом аналитического продолжения иллюстрирует рис.2, на котором показаны результаты обработки модельного поля источников, изображенных на рис.I, осложненного помехой, стандартное отклонение которой составляет I0 % от амплитуды поля. Попытки аналитического продолжения этого поля на глубину I800 м с применением регуляризирующих алгоритмов, но без учета дисперсии помехи, не позволяют получить физически разумного решения; учет дисперсии помехи позволяет получить результат, показанный на рис.2,а. Здесь приведен результат построения по осложненному помехой полю контактной поверхности с глубиной асимптоты I800 м и избыточной плотностью 0,3 г/см^3. Качественно результат тот же, что был получен при аналитическом продолжении, однако при предло-

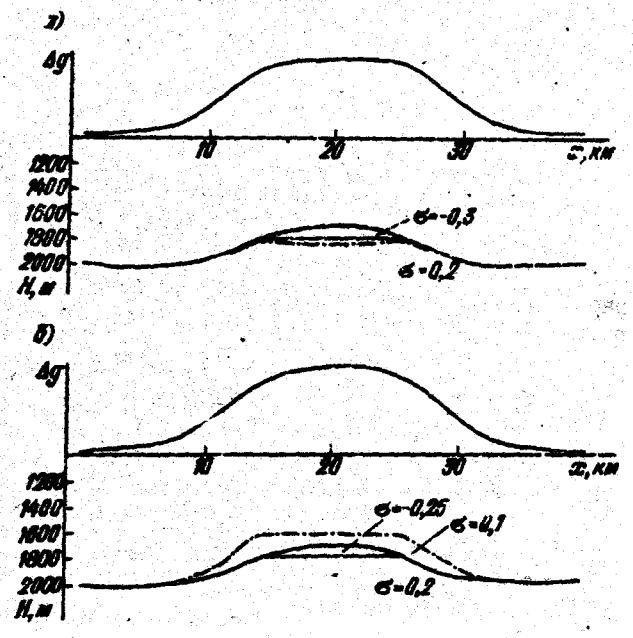


Рис.3. Пример локализации по гравитационному полю сводовой залежи углеводородов при известном положении отражающей границы в своде структуры (подобранная граница показана штриховой линией): а – σ = 0,3 г/см^3; б – σ = 0,25 г/см^3

ленной автором обработке гравитационного поля величина дисперсии помехи считалась неизвестной. Таким образом, можно отметить, что при локализации источников процедура построения контактной поверхности более устойчива к случайной помехе, чем процедура аналитического продолжения, так как, обеспечивая качественно те же результаты, не требует априорных сведений о помехе.

Некоторые возможности применения процедуры построения контактной поверхности для прямых поисков сводовых залежей углеводородов проиллюстрированы модельными примерами (рис.3). Для этих примеров было рассчитано суммарное гравитационное поле структуры с избыточной по отношению к верхней части разреза плотностью 0,2 г/см^3 и расположенной в своде структуры залежи с отрицательной избыточной плотностью σ = 0,3 г/см^3 (рис.3,а) или σ = 0,25 г/см^3 (рис.3,б). Как видно из рис.3, наличие сводовой залежи не удается установить по гравитационному полю визуально. Далее по суммарному полю строилась контактная поверхность с глубиной асимптоты 1800 м и избыточной плотностью, равной избыточной плотности модельной структуры.

Результаты построения такой контактной поверхности (рис.3,а) показывают, что при известном, например, по данным сейсморазведки, положении границы в своде гравитирующей части структуры наличие в ней сводовой залежи достаточно уверенно подтверждается при помощи процедуры построения границы раздела, причем в некоторых случаях мощность этой залежи может быть непосредственно оценена при известной избыточной плотности залежи, исходя из дефицита массы в верхней части структуры.

Если избыточная плотность структуры неизвестна, наличие сводовой залежи также устанавливается при отсутствии строгой корреляции между данными сейсморазведки и результатами построения контактной поверхности (рис.3,б). Приведенная здесь же построенная контактная поверхность с избыточной плотностью 0,1 г/см^3 позволяет сделать вывод, что при больших значениях избыточной плотности качественно форма границы раздела не изменится.

Рассмотренные примеры показывают применимость предложенных процедур построения контактных поверхностей не только для решения задач картирования границ раздела пород с различными физическими свойствами, но и для решения задач локализации и разделения источников и задач прямых поисков углеводородов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Альбер Я.И., Рязанцева И.П. Регуляризация нелинейных уравнений с монотонными операторами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. Т. 15, № 2. С. 283–289.

2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1986. 544 с.

3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука. 1984. 752 с.

4. Комплексирование геофизических методов при решении геологических задач / Под ред. В.Е.Никитского, В.В.Бродового. М.: Недра, 1987. 471 с.

5. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. 104 с.

6. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986. 232 с.

7. Приближенное решение операторных уравнений / М.А.Красносельский, Г.М.Вайникко, П.П.Забрейко и др. М.: Наука, 1969. 456 с.

8. Пруткин И.Л. О решении трехмерной обратной задачи гравиметрии в классе контактных поверхностей методом локальных поправок // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 1. С. 67-77.

9. Стеростенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наукова думка, 1978. 228 с.

10. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.