Записки Санкт-Петербургского горного института.
Т. 136. СПб, 1993

УДК 622:243.3

Л.К.ГОРШКОВ, Г.Г.ЗАРЕЦКИЙ-ФЕОКТИСТОВ
(Санкт-Петербургский горный ин-т),
Р.К.БОГДАНОВ
(ИСМ АН Украины)

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АЛМАЗНОЙ КОРОНКИ С ГОРНЫМ МАССИВОМ

При проектировании алмазного породоразрушающего инструмента значительный интерес представляет оценка его напряженно-деформированного состояния в процессе бурения, или динамического взаимодействия с горным массивом. При этом динамический характер работы алмазной коронки определяется величиной и интенсивностью изменения амплитуды колебаний крутящего момента, передаваемого коронке от привода через бурильную колонну.

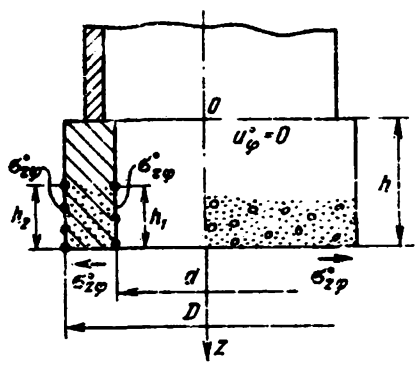


Рис.1. Расчетная схема для решения динамической контактной задачи взаимодействия алмазной коронки с некоторым горным массивом

Задача может быть решена при допущении, что матрица коронки представляется полым цилиндром с плоскими торцами, рассеченным снизу на ряд секторов с внешним диаметром D, внутренним d, высотой h (рис.1). Верхний торец матрицы считается жестко скрепленным с корпусом коронки. При такой расчетной схеме допускается, что акустическая жесткость матрицы ниже акустической жесткости корпуса. На боковые поверхности матрицы действуют за счет трения касательные напряжения $\sigma_{r\varphi}^\circ$. По торцу секторов матрицы распределены по произвольному закону скручивающие касательные напряжения, симметричные относительно оси коронки, $-\sigma_{z\varphi}^\circ$.

Представим решение нашей задачи как сумму решений трех простых задач: нагрузка только по торцу секторов матрицы; нагрузка только по внутренней боковой поверхности высотой h_1, соответствующей высоте установки внутренних подрезных алмазов; нагрузка только по внешней боковой поверхности матрицы высотой h_2, соответствующей высоте установки наружных подрезных алмазов.

Решение будем искать в упругом приближении. Временную зависимость при этом примем в виде единичной функции $h(t)$ или переходной функции Грина для определенной конструкции матрицы при произвольном характере нагружения во времени. Тогда упругие функции определятся через свертку:

$$\sigma(t) = \int_0^t \sigma_0'(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau, \qquad (1)$$

где $g(\tau)$ – переходная функция для соответствующей упругой величины по некоторому аргументу τ; $\sigma_0'(t)$ – внешняя нагрузка как функция времени.

При торцевом нагружении контакт матрицы с забоем осуществляется частью поверхности, т.е. по контактным площадкам секторов ΔS_1 (с углом сектора θ_1), разделенным равными промежутками (с углами секторов θ_2). Для упрощения можно принять $\theta_1 = \theta_2$. Тогда будем иметь

$$\sigma_{z\varphi} = \begin{cases} \sigma_0, & 0 \le \theta \le \theta_1, \quad \theta_1 = \theta_2; \\ 0, & 0 \le \theta \le \theta_2, \end{cases} \qquad (2)$$

где θ – текущая угловая координата; $\sigma_{z\varphi}$ – переменная нагрузка по торцу матрицы.

Обозначим через N число контактирующих с забоем секторов и разложим $\sigma_{z\varphi}$ в ряд Фурье:

$$\sigma_{z\varphi}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \cos n\theta, \qquad (3)$$

откуда

$$\sigma_n = \frac{2}{\bar\theta} \int_0^{\bar\theta} \sigma_{z\varphi}(\theta) \cos n\theta\, d\theta = \frac{\sigma_0 N}{n\pi} \sin \frac{2\Delta S_1 n}{\left(\frac{D^2}{4} - \frac{d^2}{4}\right)},$$

где $\bar\theta = 2\pi/N$.

При $\theta_1 \neq \theta_2$ $\theta_1 = \eta\,\theta_2$, где η – коэффициент пропорциональности, получим

$$\sigma_n = \frac{\sigma_0 N}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{N} \frac{1}{1-\eta^{-1}}. \qquad (4)$$

При $n = 0$, определив $\lim\limits_{n\to 0} \frac{\sin n}{n} = 1$, будем иметь

$$\sigma_n = \frac{2\sigma_0}{1-\eta^{-1}} \qquad (5)$$

Величина коэффициента η может служить мерой износа матрицы от трения по забою. Средние величины касательного напряжения, действующего по торцу матрицы, по площади сечения S

$$\sigma_{z\varphi}^{cp} = \frac{1}{S} \int_{(S)} \sigma_{z\varphi}\, dS = \frac{\sigma_0 N \Delta S_1}{\pi\left(\frac{D^2}{4} - \frac{d^2}{4}\right)}, \qquad (6)$$

а также момента рения на площади S

$$M_{xp}^{cp} = \int_{(S)} \sigma_{z\varphi}^{cp} S ds = \frac{\pi}{3} \sigma_0 \left(\frac{D^3}{8} - \frac{d^3}{8} \right) \qquad (7)$$

При осесимметричной задаче в качестве действующей на торец нагрузки можно принять нулевой ($n = 0$) член ряда Фурье при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{r\varphi} = 0 \quad \text{при} \quad r = \frac{d}{2}; \ \frac{D}{2};$$

$$u_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0; \qquad (8)$$

$$\sigma_{z\varphi} = \sigma_0 h(t) \quad \text{при} \quad z = h.$$

В случае симметрии отличны от нуля только одна составляющая перемещения $u_\varphi = u$, для которой справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{u}{r^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad (9)$$

где t – время; c_t – скорость поперечных волн в материале матрицы.

Выразим граничные условия (8) через перемещения:

$$\sigma_{z\varphi} = G \frac{\partial u}{\partial z} = \sigma_0 h(t) \quad \text{при} \quad z = h;$$

$$u = 0 \quad \text{при} \quad z = 0; \qquad (10)$$

$$\sigma_{r\varphi} = G \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) = 0 \quad \text{при} \quad r = \frac{d}{2}; \ \frac{D}{2},$$

где G – модуль упругости при сдвиге.

Используем для выражений (9) и (10) преобразования Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - \frac{s^2}{c_t^2} \bar{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) - \frac{\bar{u}}{r^2} = 0; \qquad (11)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{\bar{u}}{r} \right) = 0; \quad r = \frac{d}{2}, \frac{D}{2};$$

$$\bar{u} = 0; \quad z = 0; \qquad (12)$$

$$G \frac{\partial \bar{u}}{dz} = - \frac{\sigma_0}{s}; \quad z = h,$$

где $\bar{u}$ – изображение функции u; s – параметр преобразования Лапласа.

Получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} - \frac{\bar{u}}{r^2} - p^2 \bar{u} = 0, \qquad (13)$$

где $p = s/c_t$.

Решение уравнения (13) при $r = \frac{d}{2}; \frac{D}{2}$ можно представить в виде

$$\bar{u}(r,z) = C_0 r(A \operatorname{sh} pz + B \operatorname{ch} pz) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (A_n \operatorname{sh} \sqrt{p^2 + k_n^2}\, z +$$

$$+ B \operatorname{ch} \sqrt{p^2 + k_n^2}\, z)\left[J_1(k_n r) - T_n N_1(k_n r)\right], \qquad (14)$$

где A, B, C_0, C_n – постоянные интегрирования; k_n – волновое число, являющееся решением дисперсионного уравнения

$$J_2\left(k_n \frac{d}{2}\right) N_2\left(k_n \frac{D}{2}\right) - J_2\left(k_n \frac{D}{2}\right) N_2\left(k_n \frac{d}{2}\right) = 0; \qquad (15)$$

$J_n(x)$, $N_n(x)$ – функции Бесселя и Неймана n-го порядка;

$$T_n = \frac{J_2\left(k_n \frac{D}{2}\right)}{N_2\left(k_n \frac{D}{2}\right)} = \frac{J_2\left(k_n \frac{d}{2}\right)}{N_2\left(k_n \frac{d}{2}\right)}$$

Из граничных условий при $z = 0$ получим $B = 0$. Тогда, вводя обозначения $C_0 A \Rightarrow C_0$, $C_n A \Rightarrow C_n$, перепишем уравнение (14):

$$u(r,z) = C_0 r \operatorname{sh} pz + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh} \sqrt{p^2 + k_n^2}\, z \left[J_1(k_n r) - \right.$$

$$\left. - T_n N_1(k_n r)\right]. \qquad (16)$$

При $z = h$ определим выражения для коэффициентов C_0 и C_n:

$$C_0 = \frac{4}{Gsp \operatorname{ch} ph\left(\frac{D^4}{16} - \frac{d^4}{16}\right)} \int_{d/2}^{D/2} \sigma_0 r^2 dr; \qquad (17)$$

$$C_n = -\frac{2M_n}{Gs\left[\frac{D^2}{4}\Delta_1^2\left(k_n \frac{D}{2}\right) - \frac{d^2}{4}\Delta_1^2\left(k_n \frac{d}{2}\right)\right]} \frac{1}{\sqrt{p^2 + k_n^2}\, \operatorname{ch} \sqrt{p^2 + k_n^2}\, h}, \qquad (18)$$

где

$$M_n = \int_{d/2}^{D/2} \sigma_0 \Delta_1(k_n r)\, r dr;$$

$$\Delta_1(k_n r) = J_1(k_n r) - T_n N_1(k_n r).$$

Интегралы в выражениях (17) и (18) вычисляются, исходя из конкретного вида функции $\sigma_0 = \sigma_0(r)$.

Окончательно для изображения нулевой моды перемещения получим

$$\bar{u}_0(r,z) = C_0 r \operatorname{sh} pz , \qquad (19)$$

где

$$C_0 = -\frac{4M_0}{G\left(\frac{D^4}{16} - \frac{d^4}{16}\right) sp \operatorname{ch} ph}; \quad M_0 = \int_0^{D/2} \sigma_0(r)\, r dr .$$

Для изображений высших мод ($n \geq 1$) выражения аналогичны:

$$\bar{u}_n(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh} \sqrt{p^2 + k_n^2}\, z \left[J_1(k_n r) - T_n N_1(k_n r)\right]; \qquad (20)$$

$$C_n = -\frac{2M_n}{Gs\left[\frac{D^2}{4}\Delta_1^2\left(k_n \frac{D}{2}\right) - \frac{d^2}{4}\Delta_1^2\left(k_n \frac{d}{2}\right)\right]\sqrt{p^2 + k_n^2}\, \operatorname{ch} \sqrt{p^2 + k_n^2}\, h} .$$

Осуществив обратное преобразование Лапласа, имеем для оригинала

$$u_0(r,z) = -\frac{2M_0 r c_t}{G\left(\frac{D^4}{16} - \frac{d^4}{16}\right)}\left[\left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{при } 0 < (t+\bar{z}) < \bar{h} \\ (t+\bar{z}) - (1)^n\left[(t+\bar{z}) - 2n\bar{h}\right] & \text{при } (2n-1)\bar{h} < (t+\bar{z}) < (2n+1)\bar{h}, \\ & n \geq 1 \end{array}\right\} -\right.$$

$$\left. -\left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{при } 0 < (t-\bar{z}) < \bar{h} \\ (t-\bar{z}) - (-1)^n\left[(t-\bar{z}) - 2n\bar{h}\right] & \text{при } (2n-1)\bar{h} < (t-\bar{z}) < (2n+1)\bar{h}, \\ & n \geq 1 \end{array}\right\}\right], \qquad (21)$$

где $\bar{z} = z/c_t$; $\bar{h} = h/c_t$;

$$u_n(r,z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_n}{k_n}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{h\left[\bar{t} + z + 2h(m+1)\right] - h\left[\bar{t} - z + 2h(m+1)\right] - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\bar{t}}\left[J_1\left(\bar{t} + z + 2h(m+1)\right) - J_1\left(\bar{t} - z + 2h(m+1)\right)\right] d\bar{t}\right\}, \qquad (22)$$

где $\bar{t} - \left[z - 2h(m+1)\right] \geq 0$; $\bar{t} + \left[z + 2h(m+1)\right] \geq 0$;

$h = \bar{h}\bar{k}$; $\bar{t} = t\bar{k}_n$; $z = \bar{z}\bar{k}_n$; $\bar{k}_n = k_n c_t$.

Выражение (21) описывает распространение скачков перемещений со скоростью c_t от торцов матрицы вдоль оси z. Амплитуда скачков равна общему множителю перед квадратными скобками. Выражение (22) определяет перемещения, вызванные высшими модами колебаний, имеющими осциллирующий характер распределения по координатам r, z. Каждому номеру $n \geq 1$ соответствует своя мода колебаний с амплитудой

$$\bar{M}_n = \frac{2M_n\left[J_1(k_n r) - T_n N_1(k_n r)\right]}{G\left[\frac{D^2}{4}\Delta_1^2\left(k_n \frac{D}{2}\right) - \frac{d^2}{4}\Delta_1^2\left(k_n \frac{d}{2}\right)\right]} . \qquad (23)$$

Для касательных напряжений справедливы следующие выражения:

при $n = 0$

$$\sigma^{\circ}_{r\varphi} = 0; \tag{24}$$

$$\sigma^{\circ}_{z\varphi} = -\frac{2M_c r}{\frac{D^4}{16} - \frac{d^4}{16}} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \text{при} \quad 0 < (t+\bar{z}) < \bar{h}; \\ \left(1-(-1)^n\right) & \text{при} \quad (2n-1)\bar{h} < (t+\bar{z}) < (2n+1)\bar{h}, \\ & n \geq 1 \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} 0 & \text{при} \quad 0 < (t-\bar{z}) < \bar{h} \\ \left(-1+(-1)^n\right) & \text{при} \quad (2n-1)\bar{h} < (t-\bar{z}) < (2n+1)\bar{h}, \quad n \geq 1 \end{bmatrix} \right\}; \tag{25}$$

при $n = 1$

$$\sigma^{n}_{r\varphi}(r,z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{G}{k_n} \left(\frac{\partial \bar{M}_n}{\partial r} - \frac{\bar{M}_n}{r} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ h\left(\bar{t}+z+2h(m+1)\right) - \right.$$

$$- h\left(\bar{t}-z+2h(m+1)\right) - \int_0^t \left[J_1\left(\bar{t}+z+2h(m+1)\right) - \right.$$

$$\left. \left. - J_1\left(t-z+2h(m+1)\right) \right] d\bar{t} \right\}; \tag{26}$$

$$\sigma^{n}_{z\varphi}(r,z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{M}_n G}{c_t} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \delta\left(\bar{t}+z+2h(m+1)\right) + \right.$$

$$+ \delta\left(\bar{t}-z+2h(m+1)\right) - J_1\left(\bar{t}+z+2h(m+1)\right) -$$

$$\left. - J_1\left(\bar{t}-z+2h(m+1)\right) \right\}, \tag{27}$$

где $\bar{t}-[z-2h(m+1)] \geq 0$; $\bar{t}+[z+2h(m+1)] \geq 0$; δ - дельта-функция.

Смысл выражений (24)-(27) аналогичен выражениям (21), (22).

При нагрузке на внутренней боковой поверхности граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi} &= 0 \quad \text{при} \quad r = D/2; \\ \sigma_{r\varphi} &= 0 \quad \text{при} \quad r = d/2, \quad 0 \leq z \leq (h-h_1); \\ \sigma_{r\varphi} &= \sigma_0 h(t) \quad \text{при} \quad r = d/2, \quad (h-h_1) < z < h; \\ \sigma_{z\varphi} &= 0 \quad \text{при} \quad z = h; \\ u_{\varphi} &= 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Общее решение волнового уравнения в пространстве изображений при преобразовании Лапласа для исследуемого случая можно представить в следующем виде:

$$\bar{u}(r;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{sk_n}\,s(k_n r)\left[J_2\left(k_n\frac{d}{2}\right)-\frac{J_2\left(k_n\frac{D}{2}\right)}{N_2\left(k_n\frac{d}{2}\right)}N_2\left(k_n\frac{d}{2}\right)\right]^{-1};$$

$$\bar{\sigma}_{r\varphi}(r;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{GA_n}{s}\left[J_2(k_n r)-\frac{J_2\left(k_n\frac{D}{2}\right)}{N_2\left(k_n\frac{D}{2}\right)}N_2(k_n r)\right]\left[J_2\left(k_n\frac{d}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{J_2\left(k_n\frac{D}{2}\right)}{N_2\left(k_n\frac{D}{2}\right)}N_2\left(k_n\frac{d}{2}\right)\right]^{-1} \qquad (29)$$

$$\bar{\sigma}_{z\varphi}(r;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{sk_n}\,s(k_n r)\left[J_2\left(k_n\frac{d}{2}\right)-\frac{J_2\left(k_n\frac{D}{2}\right)}{N_2\left(k_n\frac{D}{2}\right)}N_2\left(k_n\frac{d}{2}\right)\right]^{-1},$$

где

$$A_n=(-1)^{n+1}\frac{2\sigma_0}{\bar{n}\pi G}\sin\bar{n}\pi\bar{h}_1\sin\bar{n}\pi\bar{z};$$

$$B_n=(-1)^{n+1}\frac{2\sigma_0}{n}\sin\bar{n}\pi\bar{h}_1\cos\bar{n}\pi\bar{z};$$

$$s(k_n r)=J_1(k_n r)-\frac{J_2\left(k_n\frac{D}{2}\right)}{N_2\left(k_n\frac{D}{2}\right)}N_2(k_n r);$$

$$\bar{z}=z/h;\quad \bar{n}=\left(n+\frac{1}{2}\right);\quad n=0,1,2,\ldots;\quad k_n^2=p^2+\frac{\bar{n}\pi^2}{h^2};\quad \bar{h}_1=\frac{h_1}{c_t}$$

Переходя от изображений (29) к оригиналам, получим при $n=0$

$$u_0=\sum_{n=0}(-1)^{n+1}\frac{8\sigma_0}{\pi G}\frac{\bar{r}\frac{\bar{d}^2}{4}c_t}{\left(\frac{\bar{D}^4}{16}-\frac{\bar{d}^4}{16}\right)}\cdot\frac{\cos q_n t-1}{\bar{n}q_n^2}\sin\bar{n}\pi\bar{h}_1\sin\bar{n}\pi\bar{z};$$

$$\sigma^{\circ}_{z\varphi}=\sum_{n=0}(-1)^{n+1}\frac{8\sigma_0}{h}\frac{\bar{r}\frac{\bar{d}^2}{4}c_t}{\left(\frac{\bar{D}^4}{16}-\frac{\bar{d}^4}{16}\right)}\frac{\cos q_n t-1}{q_n^2}\sin\bar{n}\pi\bar{h}_1\cos\bar{n}\pi\bar{z}; \qquad (30)$$

$$\sigma^{\circ}_{r\varphi}=\sum_{n=0}(-1)^{n+1}\frac{2\sigma_0\frac{\bar{d}^2}{4}}{\bar{n}\pi^2\bar{r}^2}\frac{\frac{\bar{D}^4}{16}-\bar{r}^4}{\frac{\bar{D}^4}{16}-\frac{\bar{d}^4}{16}}h(t)\sin\bar{n}\pi\bar{h}_1\sin\bar{n}\pi\bar{z},$$

где $\bar{d} = d/c_1$; $\bar{D} = D/c_1$; $\bar{r} = r/c_1$; $\rho_m^2 = \frac{\pi^2 n^2 c_1^2}{h^2}$.

Подобно полученным зависимостям можно получить и зависимости для напряжений и перемещений при нагрузке на внешнюю боковую поверхность матрицы коронки, формально их можно получить из выражений (30) заменами: $d \Rightarrow D$; $D \Rightarrow d$; $h_1 \Rightarrow h_2$.

В качестве примера анализа и использования полученных решений произведен расчет по зависимостям (21) и (25) и построены эпюры напряжений и

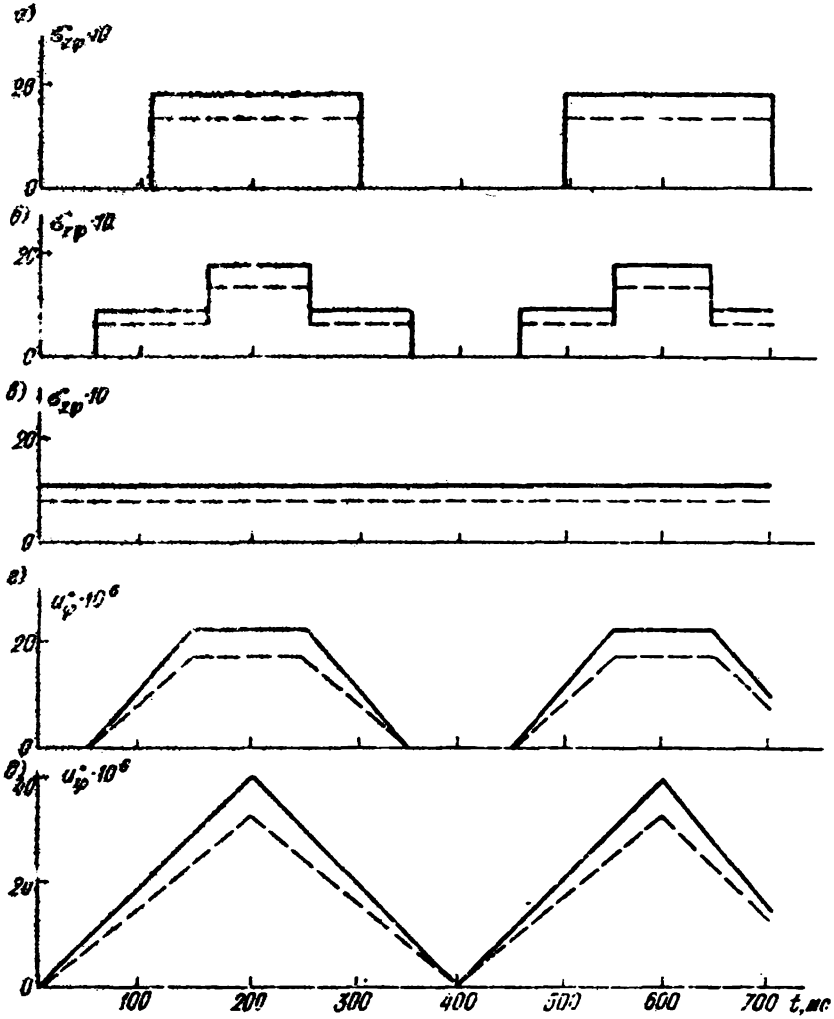


Рис.2. Изменение во времени эпюр напряжений $\sigma_{z\varphi}^\circ$ и перемещений u_φ° от действия единичной нагрузки $\sigma_0 = 1 \cdot 10^{-1}$ МПа, на торец коронки на различных уровнях от места соединения матрицы с корпусом: для напряжений при $z = 0$ (а); $z = h/2$ (б); $z = h$ (в); для перемещений при $z = h/2$ (г), $z = h$ (д); сплошные линии – равномерное распределение нагрузки по торцу; штриховые – распределение по закону согласно зависимости (31)

перемещений для торцевой части коронки на различных удалениях от места соединения матрицы с корпусом: $z = 0,\ h/2,\ h$.

Расчет производился для импрегнированной коронки с плоским торцом диаметром 59 мм (D 59 мм, d = 42 мм), материал матрицы которой имел следующие константы: $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа, $c_t = 2 \cdot 10^3$ м/с. При расчетах нагрузка по торцу коронки задавалась двух видов: равномерная по всему сечению и распределенная по закону

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{(r^2 - d^2/4)(D^2/4 - d^2/4)}}{0{,}219\, d^2/4}. \qquad (31)$$

Напряжения и перемещения рассчитывались для внутренней точки матрицы при $r = d/2$. Так как величины $\sigma^{\circ}_{z\varphi}$ и $\sigma^{e}_{r\varphi}$ линейно зависят от радиуса, то для получения их конкретных значений в произвольной точке сечения величины $\sigma^{c}_{r\varphi}\big|_{r=d/2}$ и $u^{o}_{\varphi}\big|_{r=d/2}$ умножались на $r/d/2$.

Анализ построенных эпюр (рис.2) позволил сделать следующие выводы:

1. При нагружении торца матрицы алмазной коронки в соответствии с единичной функцией напряжения характер изменения перемещений и напряжений в любом произвольном сечении коронки носит явно выраженный импульсивный вид, причиной которого является наложение друг на друга волн, отраженных от торцов матрицы. Так как при расчете материал матрицы принят с акустической жесткостью ниже, чем для корпуса, то в определенные промежутки времени наложение прямого импульса на отраженный приводит к полной компенсации напряжений и перемещений.

2. Для нулевой моды изменение характера распределения по торцу матрицы коронки напряжений и перемещений качественно не зависит от закона распределения нагрузки, наблюдаются лишь несущественные количественные отклонения.

3. В некоторые промежутки времени наложение прямого и отраженного импульсов приводит к удвоению напряжений даже при нулевой моде, что следует учитывать при прочностных расчетах; кроме того, представляется целесообразным при изготовлении алмазных коронок придавать верхней границе матрицы, в месте ее соединения с корпусом, некоторый наклон, с тем, чтобы нижняя и верхняя торцевые поверхности матрицы не были бы параллельны между собой, а также использовать демпфирующие прослойки.