***А.П.ГОСПОДАРИКОВ, О.Е.КАРПУХИНА, Г.В.ОВЧАРЕНКО***
Санкт-Петербургский горный институт, Россия

# ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ГЕОМЕХАНИКИ

Проектирование горных выработок, добыча полезных ископаемых, сооружение подземных объектов различного назначения на больших глубинах и в сложных горно-геологических условиях тесно связано с задачей определения напряженно-деформированного состояния (НДС) массивов горных пород.

Современные методы расчета НДС подработанного горного массива, учитывающие различные условия пластичности в упругопластической области, приводят к точным решениям только для ограниченного круга частных задач, поэтому построение эффективных расчетных методов и широкое их внедрение в инженерную практику по-прежнему является основной задачей многих прикладных исследований. В работе используется разработанный численно-аналитический алгоритм решения нелинейных задач горной геомеханики [2]. Данный алгоритм основывается на сочетании вариационного метода В.З.Власова [1], метода линеаризации Ньютона – Канторовича, гипотез теории малых упругопластических деформаций Ильюшина – Генки [6], метода продолжения по числовому параметру, метода конечных разностей, метода матричной (циклической) прогонки и общего итерационного процесса.

При определении НДС массива горных пород будем считать, что нелинейная зависимость напряжений от деформаций при пропорциональном возрастании внешних сил (диаграмма $\sigma-\varepsilon$) имеет вид [4]

$$\sigma=\Phi(\varepsilon)=E\varepsilon[1-\omega(\varepsilon)];\qquad E\geq\frac{1}{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)\geq\frac{d\Phi}{d\varepsilon}\geq 0\,. \tag{1}$$

Последнее свойство функции $\Phi(\varepsilon)$ означает, что материал массива в общем случае можно упрочнить. Отметим также, что рассмотрение физического закона в виде (1) учитывается упругость процесса разгрузки и повторной загрузки.

Поскольку главные оси тензоров напряжений и деформаций совпадают [4], в проекциях на оси $Ox$, $Oy$ имеем (в рамках теории малых упругопластических деформаций [6]) следующие соотношения:

$$\sigma_x-\sigma_0=\frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_x-\varepsilon_0);\quad \sigma_y-\sigma_0=\frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_y-\varepsilon_0);\quad \tau_{xy}=\frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy}, \tag{2}$$

где $\sigma_0$ и $\varepsilon_0$ – среднее нормальное напряжение и среднее относительное удлинение соответственно; $\sigma_i=\sqrt{\sigma_x^{\,2}-\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^{\,2}+3\tau_{xy}^2}$; $\varepsilon_i=\frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon_x^{\,2}-\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y^{\,2}+\frac{3}{4}\gamma_{xy}^2}$.

Заметим, что для каждого материала горного массива интенсивность напряжений $\sigma_i$ является вполне определенной и не зависящей от характера напряженного состояния функцией интенсивности деформаций $\varepsilon_i$. Эту зависимость обозначим, как и в случае (1), в виде

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i), \qquad \sigma_i = 3G\varepsilon_i[1-\omega(\varepsilon_i)]. \tag{3}$$

Таким образом, функция $\omega$ выражается через $\Phi$:

$$\omega = 1-(1/3G)(\sigma_i/\varepsilon_i). \tag{4}$$

Представим искомые функции обобщенных перемещений $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в виде [1]

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\varphi_i(y); \quad v(x,y) = \sum_{j=1}^{m} v_j(x)\psi_j(y), \tag{5}$$

где $\varphi_i(y)$, $i = 1,2,\ldots,n$ и $\psi_j(y)$, $j = 1,2,\ldots,m$ – заданные координатные функции.

Тогда на основе принципа возможных перемещений Лагранжа с учетом формул (2)-(5) соответствующие уравнения равновесия примут вид [2]

$$\begin{gathered}
\frac{E}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}u_i'' + \frac{E\nu}{1-\nu^2}\sum_{j=1}^{m} b_{kj}v_j' - \frac{4}{3}G\sum_{i=1}^{n} a_{ki}^{*}u_i'' + \frac{2}{3}G\sum_{j=1}^{m} v_j' b_{kj} - \\
-\frac{4}{3}G\sum_{i=1}^{n} a_{ki}^{**}u_i' + \frac{2}{3}G\sum_{j=1}^{m} c_{kj}^{**}v_j - G\sum_{i=1}^{h} a_{ki}u_i - \\
-G\sum_{j=1}^{m} f_{kj}v_j' + G\sum_{i=1}^{n} r_{ki}^{*}u_i + G\sum_{j=1}^{m} f_{kj}^{*}v_j' + p_k = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, n; \\
G\sum_{i=1}^{n} f_{i\ell}u_i' + G\sum_{j=1}^{m} r_{j\ell}v_j'' - G\sum_{i=1}^{n} f_{i\ell}^{*}u_i' - G\sum_{j=1}^{m} s_{j\ell}^{*}v_j'' - G\sum_{i=1}^{n} f_{i\ell}^{**}u_i - \\
-G\sum_{j=1}^{m} r_{j\ell}^{**}v_j' - \frac{E}{1-\nu^2}\sum_{j=1}^{m} t_{j\ell}v_j - \frac{E\nu}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{n} b_{\ell i}u_i' + \\
+\frac{4}{3}G\sum_{j=1}^{m} t_{j\ell}^{*}v_j - \frac{2}{3}G\sum_{i=1}^{n} b_{\ell i}u_i' + q_\ell = 0, \quad \ell = 1, 2, \ldots, m.
\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered}
a_{ki} = \int \varphi_i\varphi_k dy; \quad a_{ki}^{*} = \int \omega\varphi_i\varphi_k dy; \quad r_{ki}^{*} = \int \omega\varphi_i'\varphi_k' dy; \; a_{ki}^{**} = \int \frac{\partial\omega}{\partial x}\varphi_i\varphi_k dy; \; b_{kj} = \int \psi_j'\varphi_k dy; \\
b_{kj}^{*} = \int \omega\psi_j'\varphi_k dy; \; c_{kj}^{**} = \int \frac{\partial\omega}{\partial x}\psi_j'\varphi_k dy; \; f_{kj}^{*} = \int \omega\psi_j\varphi_k' dy; \; f_{kj} = \int \varphi_k'\psi_j dy; \quad f_{i\ell}^{*} = \int \omega\varphi_i'\psi_\ell dy; \\
f_{i\ell}^{**} = \int \frac{\partial\omega}{\partial x}\varphi_i'\psi_\ell dy; \quad r_{j\ell} = \int \psi_j\psi_\ell dy; \; s_{j\ell}^{*} = \int \omega\psi_j\psi_\ell dy; \quad r_{j\ell}^{**} = \int \frac{\partial\omega}{\partial x}\psi_j\psi_\ell dy; \\
t_{j\ell} = \int \psi_j'\psi_\ell' dy; \; t_{j\ell}^{*} = \int \omega\psi_j'\psi_\ell dy; \; b_{\ell i} = \int \varphi_i\psi_\ell' dy; \; b_{\ell i}^{*} = \int \omega\varphi_i\psi_\ell' dy; \\
p_k = \int X(x,y)\varphi_k dy + \Delta p(x,h_p)\varphi_k(h_p); \quad q_\ell = \int q(x,y)\psi_\ell\, dy + \Delta q(x,h_p)\varphi_\ell(h_p).
\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $h_\ell$ – толщина упругого слоя массива горных пород, $h_\ell = \dfrac{\sigma_s}{\gamma}$; $\sigma_s$ – предел текучести материала массива; $h_p$ – толщина пластического слоя. Отметим также, что интегралы в (7) вычисляются по всей толщине пластического слоя $h_p$.

Полученная система $n+m$ нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка (6) относительно неизвестных функций $u_i(x)$, $i = 1,2,\ldots, n$; $v_j(x)$, $j = 1,2,\ldots, m$ сводится к соответствующей системе уравнений первого порядка с заданными граничными условиями. Последняя может быть записана в векторном виде:

$$\frac{d\overline{V}}{dx} = \overline{g}(\overline{V}, x); \qquad 0 < x < \ell; \qquad \overline{D}(\overline{V}_0, \overline{V}_\ell) = 0. \tag{8}$$

Сформулированная система нелинейных дифференциальных уравнений (8), описывающая напряженное состояние массива горных пород, представляется в виде общего нелинейного операторного уравнения в некотором вещественном банаховом пространстве $E$ [5]:

$$T(v) = 0, \tag{9}$$

где под элементом $v$ понимается вектор-функция искомого решения, компоненты которой суть кусочно-непрерывные вместе с первыми производными ограниченные функции, определенные на промежутке $[0, \ell]$; $T$ – дифференциальный оператор, символизирующий левую часть системы уравнений (8), является дифференцируемым по Фреше [5] нелинейным оператором в том же пространстве $E$.

Численный алгоритм решения нелинейной краевой задачи (8) следующий [2]: вводим в операторное уравнение (9) числовой параметр $\lambda$, изменяющийся непрерывно, начиная с некоторого значения $\lambda = \lambda_0$,

$$T(v,\lambda) = 0, \qquad \lambda_0 \le \lambda \le \lambda^*;$$

$$T(v_0,\lambda_0) = 0, \quad T(v,\lambda^*) \equiv T(v).$$

Тогда итерационный процесс дискретного продолжения по числовому параметру $\lambda$, начиная с известной точки $(v_0, \lambda_0)$, примет вид ( предварительно осуществляется переход от (9) к эквивалентной задаче $v = A(v,\lambda)$)

$$\begin{gathered} v_k^0 = v_{k-1}, \qquad v_k^n = A(v_k^{n-1}, \lambda_k), \quad n = 1,2,\ldots; \\ v_k = \lim_{n\to\infty} v_k^n, \quad k = 1,2,\ldots, \end{gathered} \tag{10}$$

где итерационный процесс (10) построен для уравнения, полученного после применения метода линеаризации Ньютона – Канторовича [5] к операторному уравнению (9):

$$[T_1(v,\lambda)]v + T_2(v,\lambda) = 0;$$

$$T_1(v,\lambda) = T_v'(v,\lambda), \qquad T_2(v,\lambda) = T(v,\lambda) - [T_1(v,\lambda)]v.$$

Последовательность $v_k^n$ определяется при каждом $n$ как решение соответствующего линейного операторного уравнения (в нашем случае – линейная краевая задача, получаемая из (8)), а с учетом дискретности задачи – из решения системы линейных алгебраических уравнений.

В качестве объекта исследования была рассмотрена горная выработка в виде горизонтального протяженного прямоугольника со сторонами $a$ = 1,5 м и $b$ = 4,5 м. Координатные функции, присутствующие в (5), задавались для данного случая в виде $\varphi_1(y) = \psi_1(y) = \exp(\beta(a - y))$.

Функция $\omega$ в случае кусочно-линейной аппроксимации диаграммы напряжения $\sigma$ - $\varepsilon$ примет вид

$$\omega = (1 - A / \varepsilon_i) B ,$$

где $A$ и $B$ – коэффициенты, определяются экспериментально и взяты из работы [3]: $A = 17{,}5 \cdot 10^{-3}$; $B = 0{,}423$.

Остальные необходимые параметры $h_\ell = 500$ м, $h_p = 200$ м, $\nu = 0{,}5$, $G = 3{,}3 \cdot 10^3$ МПА, $\beta(h_\ell + h_p) = 1$.

В результате численного решения исходной системы дифференциальных уравнений с надлежащими граничными условиями (6)-(7) и заданными физико-механическими характеристиками материала массива и геометрическими размерами горной выработки получили, что максимальное опускание кровли при $x = 0$ и $y = a$ (середина пролета выработки) равно 158 мм.

### ЛИТЕРАТУРА


1. *Власов В.З.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З.Власов, Н.Н.Леонтьев. М.: ФМ, 1960. 491 с.
2. *Господариков А.П.* Метод расчета нелинейных задач механики горных пород при подземной разработке пластовых месторождений / Санкт-Петербургский горный институт. СПб, 1999. 127 с.
3. *Зарецкий Г.Г.* Определение реологических характеристик образцов калийной соли / Г.Г.Зарецкий, А.Г.Лопушняк, В.П.Терещенко // Технология подземной разработки калийных месторождений / Пермский пед. ин-т. Пермь, 1988. С. 39-44.
4. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. 376 с.
5. *Красносельский М.А.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1962. 456 с.
6. Теория пластичности. М.: ИЛ, 1948. 352 с.