

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В РАЗРУШЕННЫХ ГОРНЫХ ПОРОДАХ

Проблемы численного моделирования поведения разрушенных (несвязных) сплошных сред связаны с развитием горно-добывающих технологий (главным образом, взрывами на выброс), изучением оползневых процессов, а также явлений, установленных в сейсмически опасных зонах. Энергия деформирования несвязных сред затрачивается на преодоление внутреннего трения и рыхление. Описание необратимых деформаций в несвязных средах на основе физических моделей с входящими в них константами возможно при условии определения этих констант в лабораторных или полевых опытах. При лабораторных испытаниях образцов не всегда можно непосредственно установить эти константы, следовательно, необходимо провести дополнительные расчеты, моделирующие условия испытаний. Сопоставление результатов опытов и расчетов поможет подобрать необходимые константы. Таким образом, можно выстроить последовательность работ по исследованию поведения горных пород при нестационарных воздействиях:

- лабораторные испытания в условиях стационарного нагружения;
- расчеты по определению поведения лабораторного образца в условиях испытаний и подбор необходимых констант;
- расчет собственно нестационарного процесса деформирования среды с использованием уравнений состояния, константы которого определены на первых двух этапах.

При определении физических констант схемы расчета должны быть простыми и обеспечивать оперативное сопровождение лабораторных испытаний с необходимой точностью и достоверностью результатов. Такая схема построена на основе конечно-элементной модели с линейной аппроксимацией перемещений [5]. Компоненты перемещений внутри элемента u_i определены в виде простой линейной аппроксимации:

$$u_i = f_i(x, y) \{q\}.$$

Приращения компонентов деформаций рассматриваются как сумма упругой и пластической составляющих:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p, \quad d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda S_{ij}.$$

Пластическое приращение деформаций, определяемое параметром $d\lambda$, вычисляется с помощью небольшой модификации процедуры Уилкинса. Суть ее в том, что сначала по упругой схеме определяются компоненты девиатора напряжений с помощью соотношения

$$dS_{ij} = 2G \left(d\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \frac{dV}{V} \right) + d\tilde{S}_{ij},$$

далее производится коррекция напряжений с перемещением на поверхность текучести, результатом чего и является вычисление параметра $d\lambda$. Вводится уравнение состояния вида [1]

$$\frac{dP}{PF_{\pm}} = \frac{d\rho}{\rho} + \Lambda(P, \rho) \sqrt{J_2} dt,$$

где P – гидростатическое давление; F_{\pm} – функция объемного сжатия (+) и расширения (-) среды; ρ – плотность; J_2 – 2-й инвариант тензора скоростей деформаций; $\Lambda(P, \rho)$ – функция рыхления среды.

Здесь гидростатическое давление и плотность связаны через две функции – F и $\Lambda(P, \rho)$, причем вторая отвечает за рыхление среды и принимается в виде степенной зависимости с рядом констант, подлежащих определению.

Графически в плоскости переменных (p, ρ) это уравнение состояния для случая изотропной нагрузки-разгрузки можно представить в виде криволинейного треугольника (рис.1).

Кривая $\rho = \rho_1(p)$ соответствует неразрушенной среде, кривая $\rho = \rho_2(p)$ – максимально разрыхленному грунту. Плотность ρ_{02} соответствует плотности максимально разрыхленной среды. Теоретически получено $\rho_{02} \approx \rho_{01} / 1,7$ (где ρ_{01} – начальная плотность неразрушенного грунта). Кривые AB, DB, EB – гидростаты нагружения; LN, KM – разгрузочные кривые. Для горных пород принимается $P_a \approx 40$ кбар. Переход вещества среды в разрушенное состояние осуществляется при выполнении следующих условий:

1) разрушение при сжатии ($P > 0$) имеет место при выполнении условия: разрушение на сдвиг $T_2 = (Y_{сж} + KP)^2 / 3$ (где T_2 – второй инвариант девиатора напряжений; $Y_{сж} / \sqrt{3}$ – сцепление скалы; $K / \sqrt{3}$ – коэффициент упрочнения скалы);

2) разрушение при растяжении ($P < 0$) осуществляется при выполнении условия $|P| = P_{кр2}$ (где $P_{кр2}$ – предел прочности при всестороннем растяжении).

После разрушения течение среды либо упругое, либо пластическое в соответствии с законом пластического течения Прандтля – Рейсса. Функция текучести разрушенной среды (щебенки) принимается в виде

$$f = (Y_k + K_k P)^2 / 3,$$

где $Y_k = 0$; $K_k = K/2$.

Расчетным путем было получено распределение гидростатического давления в цилиндрическом образце несвязной горной породы (рис.2), осаживаемом осевым давлением 2,5 кбар, при радиальном давлении 0,5 кбар (начальный диаметр образца 50 мм, длина – 100 мм).

Для решения нестационарных задач механики сплошной среды используется конечно-разностная схема на эйлеровской разнесенной сетке, где скорость и координаты точки определяются в узлах сетки, а плотность, давление, внутренняя энергия и компоненты девиатора напряжений – в центрах ячеек. Счет шага по времени разбивается на два этапа: решение разно-

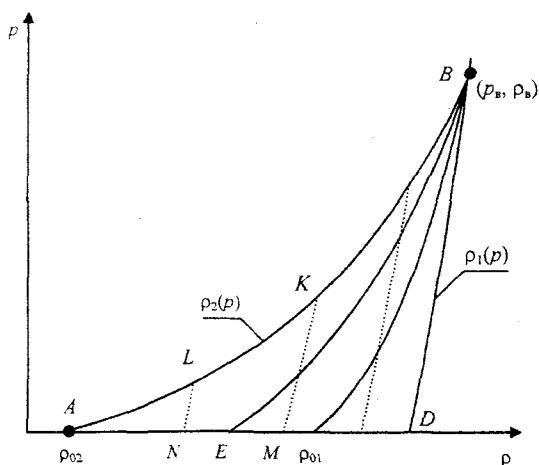


Рис.1

ДАВЛЕНИЕ, бар

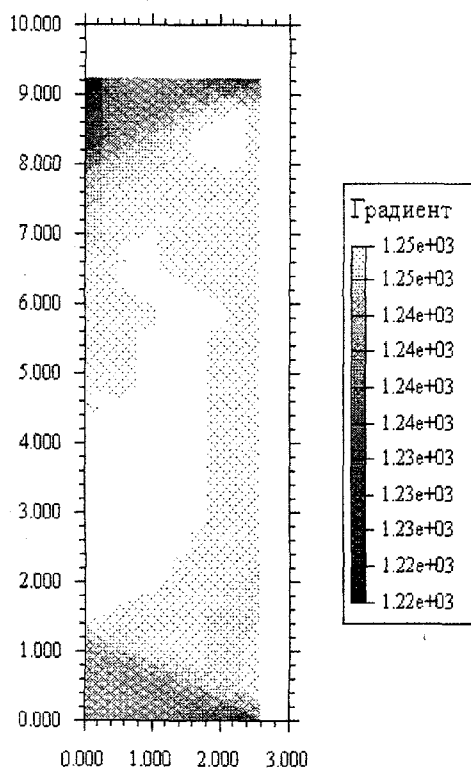


Рис.2

стных уравнений, не содержащих конвективных слагаемых, – 1 этап; решение уравнений переноса – 2 этап:

$$\rho_{j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} \rho_{j-1/2}^{n+1/2}, & \text{если } \xi^n < q_j^n, \quad u_{j+1/2}^{n+1/2} > 0, \\ \rho_{j+1/2}^{n+1/2}, & \text{если } \xi^n \geq q_j^n, \quad u_{j+1/2}^{n+1/2} > 0; \end{cases}$$

$$\rho_{j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} \rho_{j+3/2}^{n+1/2}, & \text{если } 1 - \xi^n > 1 + q_{j+1}^n, \quad u_{j+1/2}^{n+1/2} < 0, \\ \rho_{j+1/2}^{n+1/2}, & \text{если } 1 - \xi^n < 1 + q_{j+1}^n, \quad u_{j+1/2}^{n+1/2} < 0. \end{cases}$$

Здесь ξ^n — случайная величина, равномерно распределенная в интервале (0, 1),

$$q_j^n = \frac{u_j^{n+1/2} \Delta t}{\Delta x}, \quad u_j^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n).$$

Расчет переноса скорости осуществляется по формулам:

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_{j-1}^{n+1/2}, & \text{если } u_j^{n+1/2} > 0 \text{ и } \max u_{j-1}^{n+1/2}, u_j^{n+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x} > \xi^n; \\ u_{j-1}^{n+1/2}, & \text{если } u_j^{n+1/2} > 0 \text{ и } \max u_{j-1}^{n+1/2}, u_j^{n+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x} < \xi^n; \end{cases}$$

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_{j+1}^{n+1/2}, & \text{если } u_j^{n+1/2} < 0 \text{ и } \left(1 + \min u_j^{n+1/2}, u_{j+1}^{n+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) > 1 - \xi^n; \\ u_j^{n+1/2}, & \text{если } u_j^{n+1/2} > 0 \text{ и } \left(1 + \min u_j^{n+1/2}, u_{j+1}^{n+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) > 1 - \xi^n. \end{cases}$$

Решение задач, имеющих точное решение, показывает хорошее согласование результатов численных расчетов и точных значений.

Еще один инструмент расчета нестационарных процессов – метод SPH [6]. По существу – это Лагранжев метод, но он не требует использования пространственной сетки, что позволяет материальным частицам перемешиваться сколь угодно сложным образом, при этом метод позволяет отслеживать перемещения всех конкретных частиц и фрагментов среды.

Представим основные соотношения метода для осесимметричного случая [2,3]. Уравнение неразрывности, записанное для цилиндрического случая течения среды,

$$\frac{d\rho_i}{dt} \cong \rho_i \left\{ \sum_{j=1}^N ds_j \left[u_i^r - u_i^r \frac{\partial W_{ij}}{\partial r} + u_i^z - u_i^z \frac{\partial W_{ij}}{\partial z} \right] + \frac{u_i^r}{r_i} \right\},$$

где u^r, u^z – компоненты вектора скорости; r, z – компоненты радиус вектора, причем z – ось симметрии, $W(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h) = W_{ij}$ – интерполяционное ядро.

Форма записи уравнения движения в виде аппроксимационных сумм

$$\frac{du_i^r}{dt} = - \sum_{j=1}^N ds_j \left\{ \left(\frac{\sigma_i^{rr}}{\rho_i^2} \rho_j + \frac{\sigma_j^{rr}}{\rho_j} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial r} + \left(\frac{\sigma_i^{rz}}{\rho_i^2} \rho_j + \frac{\sigma_j^{rz}}{\rho_j} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial z} \right\} - \frac{1}{\rho_i} \frac{\sigma_i^{rr} - \sigma_i^{\theta\theta}}{r_i},$$

$$\frac{du_i^z}{dt} = - \sum_{j=1}^N ds_j \left\{ \left(\frac{\sigma_i^{zz}}{\rho_i^2} \rho_j + \frac{\sigma_j^{zz}}{\rho_j} \right) \frac{\partial W_{ij}}{dz} + \left(\frac{\sigma_i^{zr}}{\rho_i^2} \rho_j + \frac{\sigma_j^{zr}}{\rho_j} \right) \frac{\partial W_{ij}}{dr} \right\} - \frac{1}{\rho_i} \frac{\sigma_i^{rz}}{r_i},$$

Уравнение сохранения удельной внутренней энергии

$$de_i = \frac{\sigma_i^{rr}}{\rho_i^2} \sum_{j=1}^N ds_j \rho_j u_j^r - u_i^r \frac{\partial W_{ij}}{dr} + \frac{\sigma_i^{zz}}{\rho_i^2} \sum_{j=1}^N ds_j \rho_j u_j^z - u_i^z \frac{\partial W_{ij}}{dz} +$$

$$+ \frac{\sigma_i^{rz}}{\rho_i^2} \sum_{j=1}^N ds_j \rho_j \left\{ u_j^r - u_i^r \frac{\partial W_{ij}}{dz} + u_j^z - u_i^z \frac{\partial W_{ij}}{dr} \right\} + \frac{\sigma_i^{\theta\theta}}{\rho_i} u_i^r.$$

Наиболее часто в методе SPH используют интерполяционное ядро в виде B_4 -сплайна:

$$W_4(v, h) = \frac{1}{K} \begin{cases} \frac{15}{7} \left(\frac{2}{3} - v^2 + \frac{1}{2} v^3 \right) & 0 < v < 1; \\ \frac{5}{14} (2 - v^2) & 1 < v < 2; \\ 0 & v > 2. \end{cases}$$

Здесь $v = |\bar{x}_i - \bar{x}_j|/h$; K – коэффициент нормализации, зависящий от пространственной размерности задачи. К достоинствам этого интерполяционного ядра следует отнести его финитность, простоту и хорошую точность.

Был произведен расчет подземного взрыва Sulky на глубине 27,4 м в базальте, мощность взрыва около 0,9 кт ТНТ [4]. Форма навала грунта, получившаяся в результате натурального взрыва, представляла собой холм с неглубокой воронкой в центре навала. Высота холма в опыте около 8 м. Одним из объяснений механизма образования холма вместо ожидавшейся глубокой воронки может служить эффект рыхления грунта при больших сдвиговых деформациях и наличие сухого трения. При проведении расчета взрыва Sulky физико-механические параметры среды были взяты из литературных источников как у гранита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вахрамеев Ю.С. // Некоторые вопросы физики взрыва и кумуляции. Челябинск: Челябинский Дом печати, 1997.
2. Линник А.В. SPH-метод для задач механики сплошной среды со сферической или цилиндрической симметрией / А.В.Линник, Н.А.Скоркин // Межвузовская конференция «Дни науки» / МИФИ-1. Озерск, 19-23 апреля 1999 г.
3. Линник А.В. Модифицированный метод гладких частиц для осесимметричных задач механики сплошной среды // Межотраслевая научно-практическая конференция «Снежинск и наука» / СФТИ. Снежинск, 29 мая – 2 июня 2000 г.
4. Скоркин Н.А. Об одной конечно-разностной схеме для решения задач механики сплошной среды // Доклады международной конференции «4-е Забавихинские научные чтения». Снежинск, 1995.
5. Твердохлебов П.Ю. О разных подходах к построению конечно-элементных схем расчета несвязных сред // Межотраслевая научно-практическая конференция «Снежинск и наука» / СФТИ. Снежинск, 29 мая – 2 июня 2000 г.
6. Lucy L. // Astron. J. 1977. Vol. 82. P. 1013.