УДК 550.837

**К.М.ЕРМОХИН,** *д-р физ.-мат. наук*, *зам.директора*, k_m_e@list.ru
*ЗАО «Теллур СПб»*, *Санкт-Петербург*

**K.M.ERMOKHIN,** *Dr. phys.-mat. Sci*, *Deputy director*, k_m_e@list.ru
*«Tellur SPb Inc»*, *Saint-Petersburg*

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Наиболее близким к реальности описанием геофизических полей является дробно-рациональная аппроксимация. В таком представлении особенности полей в нижнем полупространстве адекватно отражаются нулями знаменателя. В статье содержится теория и алгоритм, реализующий данную концепцию. Предлагаемый автором метод назван методом продолжения цепной дробью.

***Ключевые слова***: цепная дробь, *QD*-алгоритм, геофизические поля, аналитическое продолжение.

# ANALYTICAL CONTINUATION OF GEOPHYSICAL FIELDS BY CONTINUED FRACTIONS METHOD

The most close to reality geophysical field description is the approximation of the fraction-rational type. In this case the presence of poles in the lower half space corresponds adequately to the denominator zeros. This article contains the theory and algorithm of realization of this conception. The proposed method is called – Continued Fraction Continuation Method.

***Key words***: continued fraction, QD-algorithm, geophysical fields, analytical continuation.

Методам аналитического продолжения геофизических полей с профиля измерений в нижнее полупространство посвящены работы ведущих геофизиков страны: И.Г.Клушина, В.Н.Страхова, М.С.Жданова и других. Явление распадения поля в окрестности особых точек, констатированное в [6], оказалось, скорее, не информативным признаком, а препятствием для практического применения метода. Причина этого состоит в несоответствии описания изучаемых полей линейными математическими моделями. Представление полей в виде полиномов, рядов Тэйлора, Фурье или интегралов типа Коши порождает существенную некорректность, которая проявляется в катастрофической неустойчивости существующих ныне алгоритмов аналитического продолжения. Это объясняется тем, что поле, имеющее особенности в нижнем полупространстве, принципиально не может адекватно описываться линейной конструкцией. Единственной относительно удачной попыткой обойти сложности является метод полного градиента В.М. Березкина [2].

Описанием поля, наиболее близким к реальному, является конструкция типа дробно-рациональной, так как наличие сингулярностей функции в нижнем полупространстве имеет адекватное соответствие нулям знаменателя. Предлагаемый метод основан на аппроксимации исследуемых функций цепными дробями. Мы назвали его методом продолжения цепной дробью (Continued Fraction Continuation Method – CFCM).

Рассмотрим измеренную по профилю функцию $f(x), a \le x \le b$, и представим ее рядом Фурье по многочленам Чебышева первого рода (приведя аргумент к отрезку [–1,1]):

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x).$$

Коэффициенты ряда Фурье по многочленам Чебышева определяются по формулам:

$$\tilde{n}_k = \int_{-1}^{1} f(x) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$c_0 = \int_{-1}^{1} f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (1)$$

Для упрощения вычислений и дальнейших преобразований, используем связь многочленов Чебышева с тригонометрическими функциями. Сделаем замену переменной в интеграле: $x = \cos(\theta)$. Тогда [7]

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos(\theta)) \cos(k\theta) d\theta;$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos(\theta)) \cos(k\theta) d\theta.$$

Далее перепишем ряд функции $F(\theta)$ в комплексной форме уже в виде ряда Фурье: $F(\theta) \approx \alpha_0 + \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \exp(-ik\theta)$ (где $\alpha_k$ – коэффициенты ряда Фурье) – с заменой вещественной переменной $x$ на комплексную $z = x + iy$ (где $y$ означает глубину) и подстановкой $\theta = \arccos(z)$.

Продолжение функции вниз соответствует отрицательным значениям $y$, вверх – положительным. Для продолжения вниз перепишем ряд в виде $F(\theta) \approx \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k Y^k$, где $Y = \exp(-i\theta)$. В правой части ряд при этом расходится ($|Y| > 1$) и простому суммированию не подлежит. В дальнейшем будем изучать непосредственно функцию

$$F(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k Y^k, \qquad (2)$$

так как практический интерес представляют полюсы $f(x)$ в нижней половине комплексной плоскости, которые одновременно являются полюсами $F(Y)$.

Для продолжения заменим ряд «соответствующей» $g$-дробью:

$$F(Y) \approx \cfrac{g_0 Y}{1 + \cfrac{g_1 Y}{1 + \cfrac{g_2(1-g_1)Y}{1 + \cfrac{g_3(1-g_2)Y}{1 + \ldots}}}} \qquad (3)$$

Соответствие здесь понимается как совпадение коэффициентов ряда Тэйлора этой дроби с коэффициентами исследуемой функции. Если брать в качестве приближения только четные подходящие дроби (3) (последний отбрасываемый член всегда равен единице, формула (3) эквивалентна представлению $F(Y)$ в виде дробно-рациональной функции посредством диагональных аппроксимаций Падэ:

$$F(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k Y^k \approx \frac{P_M(Y)}{Q_M(Y)} \; [M/M]_F, \qquad (3a)$$

где $P_M(Y)$ и $Q_M(Y)$ – полиномы степени $M$ от $Y$.

Близость диагональных аппроксимаций Падэ к представляемой ими функции при $M \to \infty$ описывается теоремой Натолла [1]: если $F(Y)$ мероморфная функция, то для произвольных, сколь угодно малых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует $M_0$, такое, что для всех $M > M_0$ диагональные аппроксимации Падэ $[M/M]_f$ удовлетворяют неравенству $|F(Y) - [M/M]_F| < \varepsilon$ на любом компакте в $Y$-плоскости, исключая множество меры меньше, чем $\delta$.

Для построения $g$-дроби, соответствующей ряду (2), существует весьма эффективный и устойчивый алгоритм ($g$-алгоритм) Бауэра. Это алгоритм типа частных и разностей ($QD$-алгоритм), изобретенный Рутисхаузером в 1954 г. для построения правильных $C$-дробей. Он позволяет по заданным коэффициентам формального степенного ряда $\alpha_k$ построить последовательность коэффициентов соответствующей непрерывной дроби $g_k$ по правилам ромба: коэффициенты $g_k$ являются диагональными элементами ($g_k^0$) так называемой $g$-таблицы:

$$\begin{array}{llll}
g_0^1 & & & \\
g_0^2 & g_1^0 & & \\
g_0^3 & g_1^1 & g_2^0 & \\
g_0^4 & g_1^2 & g_2^1 & g_3^0 \\
\multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}$$

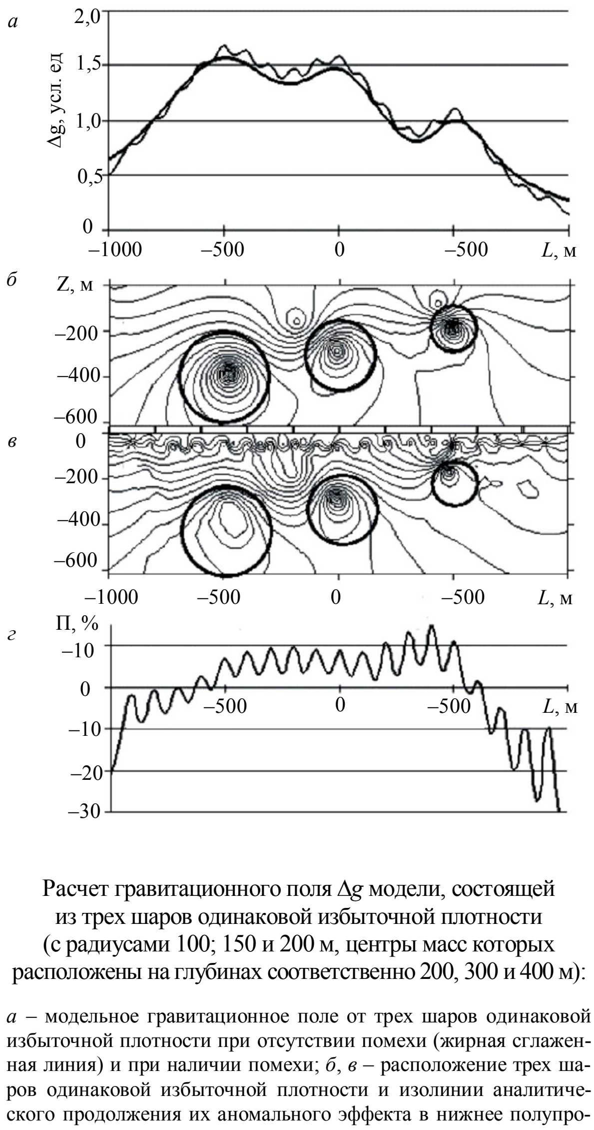
$$g_0^m = 0\,; \quad g_1^m = -\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\,; \quad g_0 = \alpha_1\,;$$

$$g_k = g_k^0 \quad \text{при } k = 1,\, 2\, \ldots\,;$$

$$(1 - g_{2n+1}^m)(1 - g_{2n+2}^m) = (1 - g_{2n}^{m+1})(1 - g_{2n+1}^{m+1})\,,$$

$$g_{2n}^m g_{2n+1}^m = g_{2n-1}^{m+1} g_{2n}^{m+1}\,.$$

Дробь эта сходится, но не монотонно и достаточно медленно. Для ускорения сходимости применим следующий прием: для заданного значения $Y$ вычисляют значения последовательных подходящих дробей $S$-дроби $f_1, f_2, \ldots f_M$ по рекуррентным формулам прямого вычисления числителей ($A_i$) и знаменателей($B_i$) [3].




Расчет гравитационного поля $\Delta g$ модели, состоящей из трех шаров одинаковой избыточной плотности (с радиусами 100; 150 и 200 м, центры масс которых расположены на глубинах соответственно 200, 300 и 400 м):

*а* – модельное гравитационное поле от трех шаров одинаковой избыточной плотности при отсутствии помехи (жирная сглаженная линия) и при наличии помехи; *б*, *в* – расположение трех шаров одинаковой избыточной плотности и изолинии аналитического продолжения их аномального эффекта в нижнее полупространство (*б* – при отсутствии помехи; *в* – при наличии помехи); *г* – помеха, создаваемая 19 шарами радиуса 25 м

Для расчета берут только значения нечетных подходящих дробей. Это эквивалентно операции сжатия $S$-дроби до $J$-дроби, соответствующей ряду Стилтьеса изучаемой функции.

Поскольку, как правило, практический интерес для определения положения полюсов представляет даже не сама функция $F(Y)$, а ее модуль, будем рассматривать функцию $\ln(1+|F(Y)|)$. В качестве предельного значения $\ln(1+|F(Y)|)$ принимается

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} \ln(1+|f_i|)\ln(k+1-i)}{\sum_{i=1}^{k} \ln(k+1-i)}\,,$$

что представляет собой суммирование ряда, соответствующего дроби, методом Вороного. Пример численной реализации метода приведен на рисунке. Как видно, метод практически устойчив к геологическим помехам.

Область применения метода не ограничивается потенциальными полями: продолжать можно, в частности, трансформанты этих полей. Метод опробован на задачах электроразведки (поле сопротивлений $\rho_к$ и вызванной поляризации $\eta_к$), магниторазведки (поле $\Delta T$), гравиразведки (поле $\Delta g$) и может быть распространен на другие геофизические методы.

Большой пробел в области математического образования в XX в. – забвение цепных дробей. Этот раздел математики ведет свое начало со времен Евклида. Цепные дроби – это, по существу, способ нелинейного суммирования расходящихся рядов, весьма часто встречающихся в геофизике.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бейкер Дж.* мл. Аппроксимации Падэ / Дж.Бейкер. мл, П.Грейвс-Моррис. М.: Мир, 1986. 502 с.

2. *Березкин В.М.* Применение геофизических методов разведки для прямых поисков месторождений нефти и газа / В.М. Березкин, М.А. М.А. Киричек, А.А.Кунарев. М.: Недра, 1978. 222 с.

3. *Джоунс У.* Непрерывные дроби. / У. Джоунс, В. Трон // М.: Мир, 1985. 414 с.

4. *Ермохин К.М.* Аналитическое продолжение геофизических полей в область источников аномалий с помощью цепных дробей // Вопросы теории и практики интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей / ИФЗ РАН. М., 2007. С.109-113.

5. *Ермохин К.М.* Аналитическое продолжение геофизических полей в область источников аномалий методом аппроксимации цепными дробями // Геофизика (ЕАГО). 2007. № 1. С.51-55.

6. *Страхов В.Н.* Аналитическое продолжение потенциальных полей. Гравиразведка: Справочник геофизика / под ред. Е.А.Мудрецовой, К.Е.Веселова. М.: Недра, 1990. 606 с.

7. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 415 с.

## REFERENCES

1. *Baker G.A.* Pade Approximants / G.A.Baker, Jr, P. Graves-Morris// Addison-Wesley Publishing Co, 1981. 502 p.

2. *Berezkin V.M.* Application of geophysical methods in direct search of oil and gas deposits. / V.M.Berezkin, M.A.Kiritchek, A.A.Kunarev // M.: Nedra, 1978. 222 p.

3. *Jones W.B.* Continued fractions. Analytic theory and applications / W. B. Jones, W. J. Thron // Addison-Wesley Publishing Co, 1980. 414 p.

4. *Ermokhin K.M.* Analytical continuations of geophysical fields into area of anomalies by continued fractions. The problem of theory and applications of interpretation of gravity, magnetic and electrical fields // IPE ASR, M.: 2007 pp.109-113.

5. *Ermokhin K.M.* Analytical continuations of geophysical fields into area of anomalies by continued fractions method // Geophysics (EAGA), 2007 № 1. pp. 51-55.

6. *Strakhov V.N.* Analytical continuation of potential fields. Gravical Prospection: Handbook of geophysicist. Edited by E.A. Mudretsova and K.E. Veselov. M.: Nedra, 1990. 606 p.

7. *Suetin P.K.* Classical orthogonal polynomials. M.: Nauka, 1979. 415 p.